目　　录

第一章

预备知识

为方便，全书采用通常的逻辑约定：和，积，否定，蕴意，等价，任意量和存在量分别用符号：$\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall$ 和 $\exists$.

在正文中，$(i.j.k)$ 表示在第 i 章的第 j 节中的第 k 项.

在文献中，[k] 表示参考文献中的第 k 项．其中 k 由该项作者 (们) 姓的前几个字母接着为数字所组成．姓氏按字母序排．同样的作者 (们) 则用数字区别不同的文章或其它出版物.

§1.1 集合

一个 **集合** 就是具有共性的一类对象的全体．这个对象可以是数、符号、字母，甚至还可以为集合．当然，这个集合不包括所定义的那个集合本身以免自相矛盾．其中的对象称为这个集合的 *元素*．我们总是用小写斜体表示元素而大写的字母为集合．说法“x 是 (不是) 集合 M 的一个元素”用如下的符号表示：

$$x \in M(x \notin M).$$

一个集合通常用一种性质所刻划．例如

$$M = \{x \mid x \leq 4, \text{正整数}\}$$
$$= \{1,2,3,4\}.$$

一个集合 M 的 基数(当 M 为有限时即它的元素的数目) 用 $|M|$ 表示. 对于上面定义的 M, 自然， $|M| = 4$.

令 A, B 是二个集合. 如果 $(\forall a)\ (a \in A \Rightarrow a \in B)$, 则称 A 为 B 的 子集. 记为 $A \subseteq B$. 进而，定义三个主要的运算：并、交和差分别如下所示：

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}; \tag{1.1.1}$$

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}; \tag{1.1.2}$$

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}. \tag{1.1.3}$$

如果 $B \subseteq A$, 则 $A \setminus B = A - B$ 用 $\overline{B}(A)$ 表示，并称之为 B 对 A 的 补. 如果所有的集合都是 Ω 的子集，则集合 A 对 Ω 的补简单地写为 $\overline{A}$. 空集 就是一个没有任何元素的集合，总是用 $\emptyset$ 表示. 对于 Ω 的子集间的上述运算服从如下的规律.

S1 排中律： $\forall A \subseteq \Omega$,

$$A \cap A = A \cup A$$
$$= A. \tag{1.1.4}$$

S2 交换律： $\forall A, B \subseteq \Omega$,

$$\begin{cases} A \cup B = B \cup A; \\ A \cap B = B \cap A. \end{cases} \tag{1.1.5}$$

S3 结合律：$\forall A,B,C\subseteq\Omega$,

$$\begin{cases}A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C;\\A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.\end{cases}\tag{1.1.6}$$

S4 吸收律：$\forall A,B\subseteq\Omega$,

$$\begin{aligned}A\cap(A\cup B)&=A\cup(A\cap B)\\&=A.\end{aligned}\tag{1.1.7}$$

S5 分配律：$\forall A,B,C\subseteq\Omega$,

$$\begin{cases}A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);\\A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).\end{cases}\tag{1.1.8}$$

S6 通界律：$\forall A\subseteq\Omega$,

$$\begin{cases}\emptyset\cap A=\emptyset,\ \emptyset\cup A=A;\\\Omega\cap A=A,\ \Omega\cup A=\Omega.\end{cases}\tag{1.1.9}$$

S7 单补律：$\forall A\subseteq\Omega$,

$$\begin{cases}A\cap\overline{A}=\emptyset;\\A\cup\overline{A}=\Omega.\end{cases}\tag{1.1.10}$$

由这些定律出发，可以得到很多重要结果. 这里仅列出一些将会用的.

定理 1.1.1　$\forall A\subseteq\Omega$,

$$\begin{cases} (\forall X \subseteq \Omega) \quad [(A \cap X = A) \vee (A \cup X = X)] \\ \qquad \Rightarrow A = \emptyset; \\ (\forall X \subseteq \Omega) \quad [(A \cap X = X) \vee (A \cup X = A)] \\ \qquad \Rightarrow A = \Omega. \end{cases} \tag{1.1.11}$$

定理 1.1.2　$\forall A, B \subseteq \Omega$,

$$A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B. \tag{1.1.12}$$

定理 1.1.3　$\forall A, B, C \subseteq \Omega$,

$$(A \cap B = A \cap C) \wedge (A \cup B = A \cup C) \\ \Leftrightarrow B = C. \tag{1.1.13}$$

定理 1.1.4　$\forall A \subseteq \Omega$,

$$\overline{\overline{A}} = A. \tag{1.1.14.}$$

定理 1.1.5　$\forall A, B \subseteq \Omega$,

$$\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \end{cases} \tag{1.1.15}$$

由上所述，可以看出 $\overline{\emptyset} = \Omega$ 和 $\overline{\Omega} = \emptyset$. 进而，还可以看出对称性 (或者说对偶性): 任何一个关于 $\cup, \cap, \emptyset, \Omega$ 的结论均可通过交换 $\cup$ 和 $\cap, \emptyset$ 和 Ω 而得出另一个结论.

对于 $A, B \subseteq \Omega$, 从 A 到 B 的一个 单射 是指这样的一个映象 α : $A \to B$ 使得： $\forall a, b \in A$,

$$a \neq b \Rightarrow \alpha(a) \neq \alpha(b).$$

单射也称为 $1-1$ 对应. 一个 *满射* 则是这样的一个映象 $\beta: A \to B$ 使得: $\forall b \in B$,

$$\exists a \in A, \ \beta(a) = b.$$

如果一个映象既是单射又是满射, 则称为 *双射*. 如果两个集合之间有一个双射, 则称它们是 *同构的*. 用 $A \sim B$ 表示 A 与 B 同构. 同构的集合具有相同的基数. 对于有限集 A 和 B, 判定它们同构与否是微不足道的. 因为这时有: $\forall A, B \subseteq \Omega$,

$$A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|.$$

§1.2　序

对于一个集合 M, $M \times M = \{\prec x, y \succ \mid \forall x, y \in M\}$ 称为 M 的 *笛氏积*. 其中, 当 $x \neq y$ 时, $\prec x, y \succ \neq \prec y, x \succ$.

所谓一个集合 M 上的一个 *二元关系*, 即指 $M \times M$ 的一个子集. 形容词 "二元" 常被忽略. 如果对于 $x, y \in M$, 满足关系 R, 则记 $\prec x, y \succ \in R$, 或 xRy. 一个 *序*, 记为 $\preceq$, 就是这样的一个关系 R 使得满足如下的三个定律:

O1 反射律: $\forall x \in M, \ xRx$.

O2 反对称律: $\forall x, y \in M, \ xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$.

O3 传递律: $\forall x, y, z \in M, \ xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

如果一个集合 M 上带有一个序 $\preceq$, 则称之为 *偏序集*, 记为 $(M, \preceq)$.

定理 1.2.1　对于一个偏序集 $(M, \preceq), \forall x_1, x_2, ..., x_n \in M$,

$$x_1 \preceq x_2 \preceq ... \preceq x_n \preceq x_1 \Rightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n. \tag{1.2.1}$$

有时，称这个定理为*反循环律*. 如果一个关系只满足 O1 和 O3 但不满足 O2, 则称它为*拟序*, 记为 $\bullet\prec$. 一个集合 M, 若带有一个拟序 $\bullet\prec$, 则称它为*拟序集*, 记为 $(M,\bullet\prec)$.

定理 1.2.2 一个拟序集 $(M,\bullet\prec)$ 的任何一个子集 S 本身也是一个拟序集，其上之拟序为限制在 S 上的部分.

如果在 M 上的一个拟序 R 还满足如下的对称律 $\tilde{\mathrm{O}}2$, 则称它为一个*等价关系*, 或简称为*等价*, 记为 $\sim$.

$\tilde{\mathrm{O}}$2 对称律： $\forall x,y\in M, xRy\Rightarrow yRx$.

对于 M 上的一个等价 $\sim$. 可以定义 $x(M)=\{y\mid\forall y\in M, y\sim x\}$ 称为 x 在 M 中的*等价类*. 由 M 上的所有等价类构成的集合称为 $(M,\sim)$ 的*商集*, 记为 $M/\sim$. 在一个拟序集 $(M,\bullet\prec)$ 上，令 $\sim_{\bullet\prec}$ 依如下方式的确定： $\forall x,y\in M$,

$$x\sim_{\bullet\prec}y\Leftrightarrow(x\bullet\prec y)\wedge(y\bullet\prec x). \tag{1.2.2}$$

则，容易看出 $\sim_{\bullet\prec}$ 是 M 上的一个等价. 而且，$(M/\sim_{\bullet\prec},\bullet\prec)$ 也是一个拟序集.

定理 1.2.3 一个拟序集 $(M,\bullet\prec)$ 是一个偏序集，当且仅当 $M/\sim_{\bullet\prec}=M$; 或者说它满足反循环律.

在一个偏序集 $(M,\preceq)$ 中，可以由*反反射律*

$$\neg x\in M,\ x\prec x,$$

传递律

$$(x\prec y)\wedge(y\prec z)\Rightarrow x\prec z$$

和

$$x\preceq y\Leftrightarrow(x\prec y)\vee(x=y)$$

定义这个序的真包含，用 $\prec$ 表示. 如果 M 上的序 $\preceq$ 满足如下所述的交错律 O4, 则称它为全序, 或者说线性序.

O4 交错律： $\forall x, y \in M, x \not\preceq y \Rightarrow y \preceq x$.

带有一个全序的集合被称为链. 一个含有 n 个元素的链的长度定义为 $n-1$. 由定理 1.2.2 和定义，即可得

定理 1.2.4 一个偏序集的任何一个子集均为偏序集. 而且，任何链的子集仍为链.

由定义可知，集合 M 上的一个关系 R 的逆为 R^* :

$$\forall x, y \in M, xR^*y \Leftrightarrow yRx.$$

经过检查 O1 - O3, 容易得到

定理 1.2.5 (对偶准则) 一个序的逆本身也是一个序.

在一个偏序集 $(M, \preceq)$ 中，可以有一个元素 a : $\forall x \in M, a \preceq x$. 根据 O2, 如果这样的元素存在，它必是唯一的. 这时，称它为最小元, 用 O 表示. 对偶地，最大元, 用 I 表示. 它们如果存在，则称为 M 的通界.

定理 1.2.6 任何有限的链都有通界.

在偏序集 $(M, \preceq)$ 中，元素 $a \in M$: $\forall x \in M, x \preceq a \Rightarrow x = a$ 被称为极小元. 对偶地，极大元, 即 $a \in M$: $\forall x \in M, a \preceq x \Rightarrow a = x$.

定理 1.2.7 任何有限非空的偏序集 $(M, \preceq)$ 都有极小元和极大元.

对于二个偏序集 $(M, \preceq)$ 和 $(N, \preceq)$, 一个映象 τ : $M \rightarrow N$,

如果满足： $\forall x, y \in M$,

$$x \preceq y \Leftrightarrow \tau(x) \preceq \tau(y), \tag{1.2.3}$$

则称之为 *保序* 或者说 *同序*. 进而，如果一个同序 $\tau: M \to N$ 还满足： $\forall x, y \in M$,

$$\tau(x) \preceq \tau(y) \Rightarrow x \preceq y, \tag{1.2.4}$$

则称之为 *同构*. 两个偏序集 $(M, \preceq)$ 和 $(N, \preceq)$ 间如果存在一个同构，则称它们是 *同构的*, 记为 $(M, \preceq) \cong (N, \preceq)$. 所有互相同构的偏序集被视为相同的. 然，一般而论，判定两个偏序集是否同构并不容易.

偏序集 $(M, \preceq)$ 的子集 X 的 *上界* 就是这样的一个元素 a : $\forall x \in X, x \preceq a$. 所谓最小上界 (或 l.u.b.) 就是这样的上界 b： $a \preceq b \Rightarrow a = b$, 其中 a 也是 X 的一个上界. 对偶地可知，*下界* 和 *最大下界*(g.l.b.). 一个偏序集的 *长度* 就是其中链的长度的最小上界. 一个 *格* 就是这样的一个偏序集使得它的任何二个元素 x 和 y 都有一个最大下界，称之为 *下丘* 并用 $x \wedge y$ 表示，和有一个最小上界，称之为 *上谷* 并用 $x \vee y$ 表示. 因此，常用 $L = (M, \preceq; \vee, \wedge)$ 表示格. 如果一个格的所有子集都有一个最大下界和一个最小下界，则称它是 *完全的*.

令 2^{Ω} 为由 Ω 的所有子集组成的集合. 由 §1.1 中所讨论的可知 $(2^{\Omega}, \subseteq; \cup, \cap)$ 是一个格. 实际上，我们有

定理 1.2.8 *一个偏序集是一个格，当且仅当它满足排中律，交换律，结合律和吸收律.*

两个格 $(M, \preceq; \vee, \wedge)$ 和 $(N, \preceq; \vee, \wedge)$ 被称为 *同构的*, 如果在两个偏序集 $(M, \preceq)$ 和 $(M, \preceq)$ 之间存在一个同构 τ 使得： $\forall x, y \in M$,

$$(\tau(x \vee y) = \tau(x) \vee \tau(y)) \wedge (\tau(x \wedge y)$$
$$= \tau(x) \wedge \tau(y)). \tag{1.2.5}$$

当然，判定二个格是否同构一般而论也不是很容易的.

§1.3 图

一个 图, 用 $G = (V, E)$ 表示，就是一个集合 V, 称为 节点集, 它的元素称为 节点, 和 V 上的一个二元关系 $E \subseteq V * V = \{(u, v) \mid \forall u, v \in V, u \neq v\}$. 称为 边集, 它的元素称为 边. 注意，其中 $(u, v) = (v, u)$. 有时，(u, u) 以及在 E 中重元素也是允许的. (u, u) 称为 环. E 的重元素为 重边. 若 V 中含有有限个节点，则称这时的 G 为 有限的. 本书只讨论有限图. 记 $\nu = | V |$ 被称为 G 的 阶. $\epsilon = | E |$ 为 G 的 度. 如果 $E = V * V$, 则称 G 为 完全图, 记为 K_ν, 或统记为 K. 如果图 $H = (V(H), E(H))$ 满足关系 $V(H) \subseteq V$ 和 $E(H) \subseteq E$, 则称 H 为 G 的 子图, 记为 $H \subseteq G$. 容易看出，任何一个图均是同阶或更高阶的完全图之子图. 空图，也记为 $\emptyset$, 是任何一个图的子图. 没有边的图称为 孤立图. 只有一个节点的孤立图称为 平凡的, 常记为 $\emptyset_1$.

定理 1.3.1 $\forall V_1 \subseteq V_2, E_1 \subseteq E_2$,

$$(V_1, E_1) = G_1 \subseteq G_2 = (V_2, E_2)$$
$$\Leftrightarrow E_1 \subseteq V_1 * V_1. \tag{1.3.1}$$

与 §1.1 中集合的情形相仿地，也可定义 并 和 交 的运算：$\forall G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_1, E_2) \subseteq K$,

$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2); \tag{1.3.2}$$

$$G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2). \tag{1.3.3}$$

容易证明 $(2^K, \subseteq)$, 2^K 为 K 的所有子图的集合，是一个偏序集而且对于 $\cup$ 和 $\cap$ 满足排中律、交换律、结合律和吸收律. 因此，由定理 1.2.8, $(2^K, \subseteq; \cup, \cap)$ 形成一个格.

对于任一边 $e = (u, v) \in E$, 它的两个 端点 被称为 相邻的. 或简记 u adj v. 同时， e 与 u 或 v关联, 简记 "e ind u" 或 "e ind v". 反之， u 或 v 也称为与 e 关联，即 "u ind e" 或 "v ind e" 每条边均可视为由两条 半边 组成：它们被记为 $[u, v)$ 和 $(u, v]$ 分别不与 u 和 v 关联而与 v 和 u 关联. 一个节点 v 的 次 或 价 是指与 v 关联半边的数目，记为 $\rho(v)$. 如果 $\rho(v) = 1 \pmod 2$, 称 v 为 奇节点; 否则， 偶节点. 次为 k, $k \geq 0$, 的节点也称 k-次节点或 k-节点. 一个 0- 节点被称为 孤立点. 1- 节点也称为 显节点.

定理 1.3.2 在任一图中，奇节点的数目恒为偶数.

如果图 G 的一个子图 H 满足

$$E(H) = \{(u, v) \mid \forall u, v \in V(H), (u, v) \in E\},$$

则称 H 为 G 的 节点导出子图. G 的一个子图 H, 若 $V(H) = \{v \mid \exists e \in E(H), v \text{ ind } e\}$, 则称 H 为 G 的 边导出子图. 常用 $G[V(H)]$ 和 $G[E(H)]$ 分别表示 G 的节点和边导出子图. 可以看出： $\forall H \subseteq G$,

$$H = G[V(H)] \Leftrightarrow (\forall u, v \in V(H),$$
$$\neg e = (u, v) \in E \setminus E(H))$$

和 $\forall H \subseteq G$,

$$H = G[E(H)] \Leftrightarrow (\neg v \in V(H))(\rho_H(v) = 0).$$

令 $2^{[G;v]}$ 和 $2^{[G;e]}$ 分别为 G 中的所有节点和边导出子图的集合. 容易用 §1.2 中的 O1 - O3 验证 $(2^{[G;v]},\subseteq)$ 和 $(2^{[G;e]},\subseteq)$ 皆偏序集. 进而, $(2^{[G;v]},\subseteq)$ 和 $(2^{[G;e]},\subseteq)$ 也都可视为格. 不过, 这时并和交在它们之中一般不是封闭的.

在图 G 中, 两个节点 u , v 之间的 *迹* 或 *途径*, 用 $T_{rl}(u,v)$ 表示, 即这样的一个边的序列 $e_1,e_2,...,e_l$ 使得 $e_i=(v_i,v_{i+1}), i=1,2,...,l, u=v_1, v=v_{l+1}$. 其中的 l 被称为 *长度*. 若一个迹 $T_{rl}(u,v)$ 的二端 $u=v$, 则称它为 *闭迹*, 或 *迂*, 记为 $T_{rl}(u)$, 或简写 T_{rl} 如果一个迹中的所有边没有相同的, 则称它为 *游* 或 *径*, 记为 $T_r(u,v)$. 当 $u=v$ 时, $T_r(u,v)$ 被称为 *闭游*, 或 *回*, 记为 $T_r(u)$, 或 T_r. 如果一个游 $T_r(u,v)$ 的边导出子图 $H=G[E(T_r(u,v))]$ 满足条件

$$(\rho_H(u)=\rho_H(v)=1)\wedge(\rho_H(v_i)=2,i=1,2,...,l-1),$$

则称它为 *路*, 常记为 $P(u,v)$, 或 P. 闭路被称为 *圈*, 常记为 $C(u)$, 或 C. 当然, 游和路都是边导出子图. 两个节点称为是 *连通的* 即指在图中存在连它们的一条路. 如果 G 中任何二个节点是连通的, 则称 G 本身是 *连通的*. 用 §1.2 中的 O1, O2 和 O3 容易验证两点之间的连通性是 V 上的一个等价, 用 $\sim_c$ 表示.

定理 1.3.3 图 $G=(V,E)$ 是连通的, 当且仅当 $|V/\sim_c|=1$.

令 $\sigma=|V/\sim_c|$. 称 σ 为 G 的 *连通片数*(或 *分图数*). 对于一个节点 v, 记 $G-v=(V\setminus\{v\},E\setminus E_v)$. 其中, $E_v=\{e\mid\forall e\in E, e \text{ ind } v\}$. 如果节点 v 满足 $\sigma(G-v)>\sigma$, 则称它为 *割点*. 相仿地, *割边* 为使得 $\sigma(G-e)>\sigma$ 的边 e. 其中, $G-e=(V,E\setminus\{e\})$. 一个 *树* 就是度最小的连通图. 可以证明, 所有 ν 阶树的度均为 $\nu-1$.

定理 1.3.4 一个 ν 阶图是树当且仅当它的度为 $\nu-1$ 而且所有的边皆割边.

一个既无孤立点也无割点的图被称为 *块* 或者说 *不可分离的*. 用 §1.2 中的 O1, Õ2 和 O3 易见 "两条边在一个图上" 的说法是边集上的一个等价, 记为 $\sim_b$

定理 1.3.5 一个无孤立点的图是不可分离的, 当且仅当 $|E/\sim_b|=1$.

图 G 的一个子图 H, 如果 $V(H)=V$ 则 H 是 G 的一个 *支撑子图*. G 的一个支撑圈称为 *Hamilton 圈*. 一个支撑回使得 G 的每一条边均出现, 则称为 *Euler回*. 若一个图 G 有 Hamilton 圈或 Euler 回, 则分别称它为 *Hamilton图* 或 *Euler图*.

定理 1.3.6 一个图是 Euler 图, 当且仅当它的节点全是偶的.

对于一个图 G, 若 $V=A+B$ (也就是 $A\cup B$ 且 $A\cap B=\emptyset$) 且 $G[A]$ 和 $G[B]$ 全是孤立图, 则称 G 为 *二部图*, 记为 $G=(A,B;E)$. 如果

$$E=\{(u,v)\mid \forall(u\in A)(v\in B)\},$$

则称 $G=(A,B;E)$ 为 *完全二部图*, 常记为 $K_{\alpha,\beta}$, 其中 $\alpha=|A|$ 和 $\beta=|B|$.

定理 1.3.7 一个图是二部图, 当且仅当它没有奇长圈.

如果 V 或 E 的一个子集中的任意二个元素在图 $G=(V,E)$ 中都是不相邻的, 则称这个子集为 *独立的*. E 的独立子集也称为 *对集* 或 *匹配*. 如果一个对集导出一个支撑子图, 则称之为

完满的(或 完美的). 对于 $a \in V$, 令

$$N_a = \{v \mid \forall v \in V, v \text{ adj } a\}$$

和对于 $A \subseteq V$, 记

$$N(A) = \bigcup_{a \in V} N_a / A.$$

定理 1.3.8 一个二部图 $G = (X, Y; E)$ 有一个完美对集，当且仅当 $\forall A \subseteq X$ 和 $\forall A \subseteq Y$, 有 $|N(A)| \geq |A|$.

已经知道，任何一个图均可在 3- 维欧氏空间中实现. 用点表示节点用曲线 (实际上直线也是允许的) 所表示边使得任何二条代表边的线除端点可能公共外 (这时二边有公共端点) 不再有任何公共点. 图的这样一种表示称为它在这个空间上的一个嵌入. 然而，不是所有的图均有在平面上的嵌入. 如果有这种嵌入则称它为 可平面的.

在一个图 G 上的一个 双分 就是其上的这样一个运算使得 $G = (V, E)$ 变为 $(V + \{w\}, (E \setminus \{(u, v)\}) + \{(u, w), (w, v)\})$. 自然，它的逆也是有意义的. 如果一个图可以从另一个图经过一系列的双分而得到，则称它们是 同胚的.

定理 1.3.9 一个图是可平面的，当且仅当它没有子图与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚.

对于二个图 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$, 如果存在一个双射 τ: $V_1 \to V_2$ 使得 $\forall u, v \in V_1$,

$$(u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (\tau(u), \tau(v)) \in E_2, \tag{1.3.4}$$

则称它们是 同构的. 由 (1.3.4) 所确定的双射 τ 称为 G_1 和 G_2 间的一个 同构. 若 $G_1 = G_2 = G$, 则这时的同构被称为 G 上的

自同构. 一般而论，在前面曾提到过的问题中，判定两个图同构与否也许是最困难的.

相仿地，可以定义 *有向图*, 用 $D=(V,A)$ 表示，其中 V 为节点集,A 是一个二元关系使得 $A\subseteq V\times V=\{\prec u,v\succ \mid \forall u\in V,\forall v\in V\}$, 称为 *弧集*. 上面所有的讨论均可相仿地用于有向图. 特别是，任何一个偏序集 $P=(M;\preceq)$ 均可用一个有向图表示，记为 $Dos=(M,Aos)$, 其中

$$\prec x,y\succ\in Aos\Leftrightarrow(x\preceq y)\wedge(\neg z,x\prec z\prec y),$$

或者说 x 被 y *覆盖*, $x,y\in M$. 如果一个 ν 阶图伴随一个从它的节点集到整数集 (几乎总是 $\{1,2,...,\nu\}$) 的单射 (双射), 则称它为 *标定的*. 在标定之下节点的象被称为这个节点的 *标记*. 当然，二标定 (或有向) 图之间的同构必须考虑节点上的标记 (边上的方向).

§1.4 群

一个 *群*, 用 $\Gamma=(X,\diamond)$ 表示，就是一个集合 X 连同一个二元关系 γ: $X\times X\to X$, 也许用 $x\diamond y$ 代表 $\prec x,y\succ\gamma$ 而将 $\diamond$ 视为运算更方便，使得如下的三条定律 Γ1, Γ2 和 Γ3 得到满足.

Γ1 (结合律) $\forall x,y,z\in S$, $(x\diamond y)\diamond z=x\diamond(y\diamond z)$.

Γ2 (幺元律) $(\exists 1_\Gamma$(或简记 1) $\in S)(\forall x\in S,\ x\diamond 1_\Gamma=x)$.

Γ3 (逆元律) $(\forall x\in S)(\exists y\in S,\ x\diamond y=1_\Gamma)$.

在 Γ2 中的元素 1 被称为 *右幺元*. 在 Γ3 中的 y 为 x 的 *右逆*. 相仿地，可以定义 *左幺元* 和一个元素的 *左逆*. 然，可以证明它们全是唯一的而且左的与右的相等. 因此，我们可以称 1 为 *幺元* 和 x^{-1} 为 x 的 *逆*.

一个群 $\Gamma = (X, \diamond)$ 的 *阶* 就是 $|X|$. 可以看出 $(1, \diamond)$ 是一个群，称之为 *平凡群* 或 *幺群*. 在本书中，如无特别说明，总是用 $\Gamma = X$ 表示群 $\Gamma = (X, \diamond)$. 如果一个群 Γ 还满足下面的 $\Gamma 4$ 则称它为 *Abel 群*.

Γ4 (交换律) $\forall x, y \in \Gamma, x \diamond y = y \diamond x$.

有二种常用方式表示群的运算，一个是 *加* 号即用 $x+y$ 代替 $x \diamond y$. 这时的幺元为 0_Γ (或 0), x 的逆为 $-x$. 特别是对于 Abel 群而言是这样. 另一个就是 *乘* 号，即用 $x \bullet y$ (或 xy) 代替 $x \diamond y$. 这时的幺元为 1_Γ (或 1), x 的逆为 x^{-1}. 通常以此表示一般的群.

令 $\Gamma = (X, \bullet)$ 是一个群和 $Y \subseteq X$. 若 $\Lambda = (Y, \bullet)$ 也是一个群，则称 Λ 为 Γ 的 *子群*, 也用 $\Lambda \subseteq \Gamma$ 表之. 当然，幺群是任何群的子群. 任何一个群均为它本身的子群.

定理 1.4.1 $\forall \emptyset \neq Y \subseteq X$,

$$\Lambda = (Y, \bullet) \subseteq \Gamma = (X, \bullet) \Leftrightarrow (\forall x, y \in Y)(xy^{-1} \in Y).$$

令 $\Gamma_i = (X_i, \bullet) \subseteq \Gamma = (X, \bullet), i \in I$. 容易看出，它们的 *交*

$$\bigcap_{i \in I} \Gamma_i = \left(\bigcap_{i \in I} X_i, \bullet\right) \subseteq \Gamma.$$

对于 $S \subseteq X$, 所有包含 S 的子群的交，用 $\langle S \rangle$ 表示，称为 Γ 中由 *S生成* 的子群. 子群 $\langle \cup_{i \in I} X_i \rangle$, 用 $\cup_{i \in I} \Gamma_i$ 表示，称为子群 $\Gamma_i, , \in I$, 的 *联*. 令 $\boldsymbol{\Gamma}$ 为由 Γ 的所有子群组成的集合. 由 §1.2 中的 O1 - O3 和定理 1.2.8 易知 $(\boldsymbol{\Gamma}, \subseteq; \cup, \cap)$ 是一个 *格*, 或更确切地，一个完全格. 因为 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的任何一个子集在 $\boldsymbol{\Gamma}$ 中既有最小上界，即其中所有子群的交，又有最大下界，即其中所有子群的联.

群Γ的一个子群Λ,若Λ满足如下的等价条件之一: $\forall x \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} x\Lambda = \Lambda x &\Leftrightarrow \forall x \in \Gamma, x^{-1}\Lambda x = \Lambda \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \Gamma, \forall y \in \Lambda, x^{-1}yx \in \Lambda, \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

则称 Λ 为 Γ 的 *正规子群*, 记为 $\Lambda \lhd \Gamma$.

容易看出, 一个 Abel 群的任何子群皆正规. 然, 一般而言, 对于非 Abel 群确有子群不是正规的. 也可以看出, 一个群的所有正规子群的集形成一个完全格. 其中, 包含关系为序, 联和交为两个运算.

对于 $N \lhd \Gamma$, $\Gamma = (X, \cdot)$, 可以按如下方式确定 X 上的一个关系, 用 $\sim_N$ 表示: $\forall x, y \in X$,

$$x \sim_N y \;\Leftrightarrow\; \exists h \in N, x = hy, \tag{1.4.2}$$

容易验证, $\sim_N$ 是集合 X 上的一个等价, 由此, 可以定义在 Γ 中 N 的 *商群* 为

$$\Gamma/N \;=\; (X/\sim_N, \bullet). \tag{1.4.3}$$

其中, $(Nx)(Ny) = N(xy)$. 商群 Γ/N 的阶称为 N 在 Γ 中的 *指标*.

令 Γ 和 Λ 是两个群. 一个函数 $\alpha: \Gamma \to \Lambda$, 如果,

$$\forall x, y \in \Gamma,\; \alpha(xy) \;=\; \alpha(x)\alpha(y), \tag{1.4.4}$$

则称之为从 Γ 到 Λ 的一个 *同态*.

由于 $o: \Gamma \to 1_\Lambda$ 是一个同态, 且称之为 *零同态*, 从 Γ 到 Λ 的所有同态的集合 Hom (Γ, Λ) 总是非空的. 一个群 Γ 到它本身的同态称为它的 *自同态*. 幺函数 $\iota: \Gamma \to \Gamma$ 就是 Γ 的一个自同态.

对于 Γ 到 Λ 的一个同态 α, 令

$$\begin{cases} \text{Im}\ \alpha = \alpha(\Gamma) = \{\alpha(x) \mid \forall x \in X\}; \\ \text{Ker}\ \alpha = \{x \mid \forall x \in X, \alpha(x) = 1_\Lambda\}, \end{cases} \tag{1.4.5}$$

它们分别称为 α 的 *象* 和 *核*. 由定理 1.4.1, 容易验证 $\text{Im}\ \alpha \subseteq \Lambda$ 和 $\text{Ker}\ \alpha \lhd \Gamma$. 如果一个从 Γ 到 Λ 的同态 α 满足 $\text{Ker}\ \alpha = 1_\Gamma$, 则称 α 为 *单同态*. 如果从 Γ 到 Λ 的一个同态 α 满足 $\text{Im}\ \alpha = \Lambda$, 则称 α 为 *满同态*. 对于两个群 Γ 和 Λ, 若有一个从 Γ 到 Λ 的一个同态, 它既是单的又是满的, 则称之为一个 *同构*. 若 Γ 到 Λ 有一个同构则称它们是 *同构的*, 并且记为 $\Gamma \cong \Lambda$. 从 Γ 到它本身的一个同构被称为 Γ 的 *自同构*. 用 Γ1 – Γ3 可以容易地检验 Γ 的所有自同构形成一个群, 称之为 Γ 的 *自同构群*, 用 $\text{Aut}\ \Gamma$ 表示.

定理 1.4.2(第一同构定律) $\forall \alpha \in \text{Hom}\ (\Gamma, \Lambda)$,

$$\Gamma / \text{Ker}\ \alpha \cong \text{Im}\ \alpha.$$

基于定理 1.4.2, 我们可以称 $\Gamma/\text{Ker}\ \alpha$ 为 α 的 *上象*. 如果 $N \lhd \Gamma$, 则映象 $\phi : x \mapsto Nx$ 是从 Γ 到 Γ/N 的一个满同态, 其中 $\text{Ker}\ \phi = N$. 我们称 ϕ 为 *标准同态*.

两个群 Γ 和 Λ, $\Lambda = (X, \bullet) \subseteq (Y, \bullet) = \Gamma$, 令 $\Gamma\Lambda = (XY, \bullet)$, 其中 $XY = \{xy \mid \forall x \in X, \forall y \in Y\}$. 人们知道, $\forall \Lambda \subseteq \Gamma, N \lhd \Gamma \Rightarrow \Lambda \cap N \lhd \Lambda$.

定理 1.4.3(第二同构定律) $\forall \Lambda \subseteq \Gamma, \forall N \lhd \Gamma$,

$$\Lambda/(N \cap \Lambda) \cong N\Lambda/N.$$

令 N 和 Q 是 Γ 的两个正规子群和 $N \subseteq Q$. 则, 我们知道 $Q/N \lhd \Gamma/N$.

定理 1.4.4 (第三同构定律) $\forall N, Q \lhd \Gamma$,

$$N \subseteq Q \Rightarrow (\Gamma/N)/(Q/N) \cong \Gamma/Q.$$

令 Φ 是一个群, S 是一个非空集和 $\sigma : S \to \Phi$ 是一个函数. 如果对于每一个函数 $\alpha : S \to \Gamma$ 都有唯一个同态 $\beta : \Phi \to \Gamma$ 使得 $\alpha = \beta\sigma$, 则称 Φ, 或者更确切地 (Φ,σ), 是在 S 上 *自由的*. 一个群, 如果存在一个集合使它在这个集合上是自由的, 则称它为 *自由群*. 由这个定义可以导出 σ 必为一个单射而且 $\mathrm{Im}\ \sigma$ 生成群 Φ. 事实上, 可以证明对任何非空集 S, 存在一个群 Φ 和一个函数 $\sigma : S \to \Phi$ 使得 Φ 在 S 上是自由的而且 $\Phi = \langle\ \mathrm{Im}\ \sigma\rangle$.

定理 1.4.5 *如果 Φ_1 在 S_1 上是自由的和 Φ_2 在 S_2 上是自由的, 则*

$$\Phi_1 \cong \Phi_2 \Leftrightarrow |\ S_1\ | = |\ S_2\ |.$$

这个定理使我们能够定义一个自由群的 *秩* 为所自由的集合的基数. 进而, 我们知道任何一个群都是某自由群的象. 这样的象被称为这个群的一个表示. 更准确地, 所谓一个群 Γ 的一个 *自由表示* 是指这样的一个满同态 $\pi : \Phi \to \Gamma, \Phi$ 是自由群. 由定理 1.4.2, 有 $\Phi/\mathrm{Ker}\ \pi \cong \Gamma$. $\mathrm{Ker}\ \pi$ 的元素被称为表示的 *关系元*. 从而, 任何一个群都可以用生成元和关系元所表征. 即使群的表示已知, 判定二个群同构与否, 一般而言仍并非容易, 因为一个群可以有不同类型的表示.

§1.5 曲面

因为一个 *曲面* 可看作这样的一个二维流形由一个具有偶数个棱的多边形, 称之为 *偶边形*, 沿着一定的方向将棱两两粘合为一而得到. 自然, 这个多边形拓扑等价一个圆盘. 这就允

许我们将它定义为一个字母的集合，记为 Ξ, 连同一个 字, 或者说一串带循环序的字母，记为 S, 且满足如下条件：Con.1, Con.2 和 Con.3.

Con.1 在 S 上有 $n, n \geq 1$ 个互不相同的字母.

Con.2 每一个字母在 S 上恰出现两次.

Con.3 任何一个字母的每一个出现不是带 1(常被忽略)就是带 -1 作为幂.

一个曲面被记为 (Ξ, S), 或简记 S. 令 $\boldsymbol{S}$ 为所有曲面的集合. 如果在同一曲面中，每一个字母的两次出现的幂均不同，则称它为*可定向的*; 否则，*不可定向的*. 在一个不可定向曲面上，总有一个字母，它的两次出现有相同的幂. 令 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 分别为所有可定向和不可定向曲面的集合，则有 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}$.

如果一个曲面通过逆循环序，置换一些字母以及将一个字母用它的逆代替可以变到另一个曲面，则此二曲面视为无异. 令 A, $B, \cdots$ 为一个曲面 $S \in \boldsymbol{S}$ 上相继字母的一段，或写为 A, $B, \cdots \subseteq S$. 注意，A, $B, \cdots$ 皆线性序除非它们本身就是 S. 允许它们为空的或只含一个字母的一次出现. 在不致引起混淆时，S 也可视为 Ξ 的一个子集. 这就是说

$$\begin{cases} S &= ABC \ \Rightarrow \ S = BCA = C^{-1}B^{-1}A^{-1}; \\ S &= Aa^{\alpha}Ba^{\beta}C, b \notin S \\ & \Rightarrow \ S = Ab^{\alpha}Bb^{\beta}C = Aa^{-\alpha}Ba^{-\beta}C. \end{cases} \tag{1.5.1}$$

也许有人会想到一些简单的曲面是什么样的. 由条件 Con.1-Con.3 容易看出，

$$\begin{cases} P_0 = aa^{-1}; \\ P_p = \prod_{1\le i\le p} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1},\ p \ge 1; \\ Q_q = \prod_{1\le i\le q} c_i c_i,\ q \ge 1 \end{cases} \tag{1.5.2}$$

全是在各种条件下最简单的曲面. 当然, P_p, $p \ge 0$, 全是可定向的. P_0 被称为 *球面*, 或者在测地投影之下等价地, *平面*. P_1 为 *环面*. Q_1 为 *射影平面*, 和 Q_2, *Klein 瓶*.

所谓 *初等变换*, 即指如下三种运算和它们的逆.

El.0 $\forall S \in \boldsymbol{S}$,

$$S = Aaa^{-1}B, A \ne 0, \text{ or } B \ne 0 \Rightarrow S = AB.$$

El.1 $\forall S \in \boldsymbol{S}$,

$$\begin{cases} S = AabBb^{-1}a^{-1}C \Rightarrow S = AaBa^{-1}C; \\ S = AabBabC \Rightarrow S = AaBaC. \end{cases}$$

El.2 $\forall S \in \boldsymbol{S}$,

$$\begin{cases} S = AaBCa^{-1}D \Rightarrow S = BaADa^{-1}C; \\ S = AaBCaD \Rightarrow S = BaAC^{-1}aD^{-1}. \end{cases}$$

如果两个曲面可以通过一系列的初等变换从一个得到另一个, 则称二者是 *可转换的*. 由 §1.2 中的 O1, Õ2 和 O3, 容易检验, 曲面间的可转换性是 $\boldsymbol{S}$ 上的一个等价, 记为 $\sim_{El}$.

定理 1.5.1 在 (1.5.2) 中, 任何两个曲面都不是可转换的.

由 (1.5.1) 和运算 El.0 - El.2, 可得如下三个公式:

$$\begin{cases} AaBbCa^{-1}Db^{-1}E \sim_{El} ADCBEaba^{-1}b^{-1}; \\ AcBcC \sim_{El} AB^{-1}Ccc; \\ Accaba^{-1}b^{-1} \sim_{El} Accaabb. \end{cases} \tag{1.5.3}$$

根据 (1.5.3) 中的公式和 El.0, 我们可以得到如下二个基本定理.

定理 1.5.2 $\forall S \in \boldsymbol{P}$, $\exists p \geq 0$, $S \sim_{El} P_p$.

定理 1.5.3 $\forall S \in \boldsymbol{Q}$, $\exists q \geq 1$, $S \sim_{El} Q_q$.

上面的三个定理使我们能够根据两个不变量: 可定向性和 $p \geq 0$ 或 $q \geq 1$ 在初等变换下将曲面分类. 其中, p 和 q 分别称为 *可定向亏格* 和 *不可定向亏格*. 二者统称为 *亏格*. 令

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}_0 = \{S \mid \forall S \in \boldsymbol{S}, S \sim_{El} P_0\}; \\ \boldsymbol{P}_p = \{S \mid \forall S \in \boldsymbol{S}, S \sim_{El} P_p\},\ p \geq 1; \\ \boldsymbol{Q}_q = \{S \mid \forall S \in \boldsymbol{S}, S \sim_{El} Q_q\},\ q \geq 1. \end{cases}$$

则我们有

$$\begin{cases} \boldsymbol{S} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}; \\ \boldsymbol{P} = \sum_{p \geq 0} \boldsymbol{P}_p; \\ \boldsymbol{Q} = \sum_{q \geq 1} \boldsymbol{Q}_q. \end{cases}$$

事实上, 我们知道曲面的基本群有如下的表示:

$$\begin{cases} \pi_1(\boldsymbol{P}_0) = & \langle 1\rangle, \text{平凡群}; \\ \pi_1(\boldsymbol{P}_p) = & \langle a_1, b_1, \cdots, a_p, b_p; \\ & \prod\limits_{1\le i\le p} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}\rangle, \qquad p \ge 1; \\ \pi_1(\boldsymbol{Q}_q) = & \langle c_1, c_2, \cdots, c_q; \\ & \prod\limits_{1\le i\le q} c_i c_i\rangle, \ q \ge 1. \end{cases} \tag{1.5.4}$$

这就是说，在 $P_p \in \boldsymbol{P}(Q_q \in \boldsymbol{Q})$ 上的任何一类迂 (在拓扑学中称为路) 均可由 $a_1, b_1, \cdots, a_p, b_p$ $(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 在关系

$$\prod_{1\le i\le p} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = 1 \ \left(\prod_{1\le i\le q} c_i c_i = 1\right)$$

之下生成， $p \ge 1(q \ge 1)$.

一个 *多面形* 就是多边形的一个集合，记

$$\Sigma = \langle X_1, X_2, \cdots, X_n\rangle, \tag{1.5.5a}$$

其中多边形 $X_1, ..., X_n$ 定义在字母集 Ξ 上使得每个字母在它们之中恰出现二次并且没有一个真子集也有这一性质. 而且，由 Σ 出发还可以定义在同样字母集 Ξ 上的另一个多面形，记

$$\Sigma^* = \langle X_1^*, X_2^*, \cdots, X_m^*\rangle \tag{1.5.5b}$$

满足关系： $\forall x, y \in \Xi$,

$$x^{-1}y \subseteq X \in \Sigma \ \Rightarrow \ xy \subseteq X^* \in \Sigma^*$$

使得任何一个字母的两次出现的幂之积与在 Σ 中相同. 容易看出， $\Sigma^{**} = \Sigma$. 由此，称 Σ^* 为 Σ 的 *对偶*. 在 Σ 中多边形称

为 面, 字母称为 棱(或 边). Σ^* 中的面称为 Σ 的 顶点(或 节点). 对于多面形 Σ, 称

$$\chi(\Sigma) = \nu - \epsilon + \varphi \tag{1.5.6}$$

为它的 *Euler*示性数. 其中, ν, ϵ 和 φ 分别为 Σ 的顶点数, 棱数和面数.

如果一个多面形可以通过 (1.5.3) 变为另一个使得每一个字母的二次出现的幂是不同的, 则称它为 可定向的; 否则, 不可定向的.

在多面形上, 下面所定义的运算 El.3 也称为初等变换. 可以看出它是从曲面的情形引伸出来的. 实际上 El.0 和 El.2 可以由 El.3 导出.

El.3 $\forall(A \neq \emptyset \vee B \neq \emptyset)$,

$$(Aa, a^{-1}B) \Rightarrow (AB).$$

多面形可以用引伸的等价, 也记为 $\sim_{El}$ 进行分类. 可以证明任何多面形都与一个曲面等价. 而且, 可定向性和 Euler 示性数是初等变换下的二个不变量. 因此, 我们有

定理 1.5.4 $\forall\Sigma$,

$$\Sigma \sim_{El} \begin{cases} P_0, & \text{当 } \chi(\Sigma) = 2, \text{可定向};\\ P_p, & \text{当 } \chi(\Sigma) = 2 - 2p, p \geq 1,\\ & \quad \text{可定向};\\ Q_q, & \text{当 } \chi(\Sigma) = 2 - q, q \geq 1,\\ & \quad \text{不可定向}. \end{cases} \tag{1.5.7}$$

这个定理可以使我们定义曲面 S 的 *Euler示性数* $\chi(S)$ 为其上多面形的 Euler 示性数. 并且称 (1.5.7) 为 *Euler公式*.

对于分别定义在 Ξ_1 和 Ξ_2 上的二多面形 Σ_1 和 Σ_2 如果存在一个双射 τ： $\Xi_1 \to \Xi_2$ 使得 $\forall X \in \Sigma_1$,

$$X = Aa^\alpha Ba^\beta C \Rightarrow \tau(X) = \tau(A)\tau(a)^\alpha\tau(B)\tau(b)^\beta\tau(C) \\ \in \Sigma_2,$$

则称 Σ_1 和 Σ_2 是 *同构的*. 其中的 τ 为它们之间的一个 *同构*. 在第十章中我们将会看到判定两个多面形同构与否并不是很困难的.

给定一个多面形 Σ, 可以得到一个图 $G(\Sigma) = (V(\Sigma), E(\Sigma))$. 其中, $V(\Sigma)$ 和 $E(\Sigma)$ 分别为 Σ 的所有顶点的集合和所有棱的集合. $G(\Sigma)$ 被称为 Σ 的 *基准图*. 而, Σ 被称为 $G(\Sigma)$ 的 *准基形*. 对于一个图 $G = (V, E)$, 如果存在一个多面形 $\Sigma \sim_{El} S \in \mathbf{S}$ 使得 G 为 Σ 的基准图, 则称 G *可嵌入* 到曲面 S 上, 简记 $G \propto S$. 这个多面形 Σ 被称为 G 在 S 上的一个 *嵌入*, 或记为 $G(\Sigma) \subset S$. 第十二章将讨论有关图在曲面上的可嵌入性的各种问题.

§1.6　注记

1.6.1　首先要提到的是关于一个理论的有效性或者好的标准. 我们尽可能使一种理论更有效. 所谓一种理论是有效的指可以借助它设计多项式时间的算法, 即计算时间不超过问题阶的一个多项式. 在 §1.5 中所建立的曲面分类的理论就是使之成为有效的一个实例.

1.6.2　关于算法的设计与分析, Aho, Hopcroft 和 Ullman 的书 [AHU1] 提供了基础知识. 如果必要, 读者也可以参见书

末文献中的有关文章.

1.6.3 关于算法复杂性的理论，特别是 NP- 完全性理论，虽然当今发展的十分迅速，即使是初学者，Garey 和 Johnson 的书 [GJ1] 仍不乏适用. 对于这一理论本身尤感兴趣的读者，也许想读一读 Cook 和 Karp 的奠基性的文章 [Co1] 和 [Ka1]. 关于这一理论的简述还可查 Hammer, 刘彦佩和 Simeone 的文章 [HLS1]. 不过，仅适于中文读者.

1.6.4 关于多面形更为精细的定义将在第十章中出现. 它形成了组合地图理论的基础 [Tut19]. 在那一章还提供了两多面形同构与否的有效识别. 当然，全面的理论有待另一本专著，因为在这方面所取得的结果已丰富多姿.

第二章

图中的树

§2.1 树与上树

虽然树本身不仅在图论中而且在数学的别的分枝中也是最简单的而且重要的一个课题. 这里不能详细讨论其各个方面. 我们只仅就树作为图的子图以简化对于与各种图的可嵌入性和确定相应的嵌入有关的问题之处理.

树作为一类图在 §1.2 中已给出了定义. 而且, 它可以用下面的说法之一确定. 这些说法将会在以后用到.

Tr.1 一个连通且无圈的图.

Tr.2 阶为 ν 度为 $\nu-1$ 的连通图.

Tr.3 任何二个节点都有且仅有一路连它们的图.

Tr.4 任何一个连通子图皆树的连通图.

Tr.5 基本群是平凡群的图.

当然, 它们都容易被证明. 而且, 其中一些 (就作者之印象 Tr.1–Tr.3) 可以在任何一本基础图论的教科书中看到. 不管怎样, 我们很关心树在曲面上的可嵌入性和嵌入.

令 $G=(V,E)$ 是一个图. 对于 $v\in V$, $E_v=\{e_1(v),e_2(v),\cdots,e_{\rho(v)}(v)\}$, 即与 v 关联的边的集合. 在 v 处的 旋 定义为 $\varrho(v)=(e_1(v),e_2(v),\cdots,e_{\rho(v)}(v))$ 所确定的循环序. 进而, 图 G 的 旋, 即 $\varrho(G)=\{\varrho(v)\mid\forall v\in V\}$. 如果将每一边任意安排一个方向和在每一节点处给定一个旋并且不同的边用不同的字母表示, 则在一个树 T 上可依如下方式确定一个旅行规则.

旅行规则 每当从 $E_v(T)$ 中的一条边 a 达到节点 v 就在 T 上沿着依此节点处的旋紧接着 a 的尚未离 v 向前旅行过的边继续往前走.

如果选定节点 v_0 为起点, 与 e_0 关联的一条边 e_0 为始边. 按照旅行规则在事先给定的旋之下能走就走. 若将所通过的边的代表字母记录下来并且根据走向与边的选定之方向相同或相反分别赋与这个字母以 1 或 -1 作为幂, 则旅行结束可得到一个字, 我们称之为 T 的一个 码.

引理 2.1.1 凡树的码皆多面形. 且, 这个多面形只有一个面.

证 令 Tr 是树 T 的一个码. 首先, 我们证 Tr 是 T 上的一个迂. 若不然, 设终点为 v_1 不等于 v_0. 由定理 1.3.2, 进入 v_1 的次数比离开 v_1 的次数多 1. 由旅行规则, v_1 不可能是终点. 然后, 证每个字母恰在 Tr 中出现二次. 因为 T 的每条边皆割边和 Tr 是一个迂, 故 Tr 每边必恰出现二次. 最后, 由于导出子图 $T[E(Tr)]$ 的连通性, Tr 是一个仅有一个面的多面形. ♮

引理 2.1.2 一个树 T 的码的基准图是 T 本身.

证 设 T' 是 T 的码 Tr 的基准图且 $T' \neq T$. 由 T 的连通性, 有一边 $a \in E(T) \setminus E(T')$ 且在 T 上与节点 $v \in V(T')$ 关联. 然, 由旅行规则, 第一条进入 v 的边也是最后离开 v 的边. 这就是说 $E_v(T') = E_v(T)$. 与假设矛盾. ♮

令 $\mathcal{T}$ 为所有树的集合. 对于一个树 $T \in \mathcal{T}$, 令 $\mathcal{T}r(T)$ 为 T 的所有码的集合.

定理 2.1.1 $\forall T \in \mathcal{T}, \forall Tr \in \mathcal{T}r(T), T(Tr) \subset P_0$.

证 由上面二个引理, 只要证 $Tr \sim_{El} P_0$ 即足. 由于任何树皆无圈, 必有一个显节点 v_1. 设 a 是那条与 v_1 关联的边. 则, 有形式 $Tr = Aaa^{-1}B \sim_{El} AB$. 由 Tr.4, AB 的基准图仍为树. 由归纳假设, $AB \sim_{El} P_0$. 固然, 当 T 的边数很小时, 容易验证. 从而, 即得定理. ♮

定理 2.1.2 $\forall T \in \mathcal{T}, \neg S \in \mathcal{S}, (S \neq P_0) \wedge (T \propto S)$.

证 由 Tr.1, 对于 T 在曲面上的任一嵌入, 它只能有一个面. 从而, 它是 T 的一个码. 且, 这个码在等价 $\sim_{El}$ 的意义下与 T 的旋的选择无关. 由定理 2.1.1, 即得定理. ♮

如果 T 是图 $G = (V, E)$ 的一个支撑树, 或者说 G 上的一个树, 则 G 的支撑子图 $T^* = (V, E \setminus E(T))$ 被称为 G 上的一个上树. 如果 G 本身是树, 则它的上树只能是 G 的一个支撑孤立子图.

定理 2.1.3 在任何连通图上, 总有一个树. 从而, 也有一个上树.

证 如连通图 G 没有圈, 由 Tr.1, 它本身就是一个树. 否则, 我们可任选择一个圈. 从 G 中去掉这个圈上的一条边得一

个新图. 如果它不再有圈，则再由 Tr.1, 它就是一个树. 如若不然，用这个新图代替 G, 继续上述过程. 由 G 的有限性，总可求得 G 上的一个树. ♮

引理 2.1.3 令 T 是图 $G=(V,E)$ 上的一个树. T^* 相应 T 的上树. 则对于 T^* 上的任一条边，在 $T+e=(V,E(T)+e)$ 上恰有一个圈.

证 设 $e=(u,v)$. 由 Tr.3, 在 T 上恰有一条路 $P(u,v)$. 从而，$P(u,v)+e$ 恰形成一个圈. 即为引理. ♮

对于图 $G=(V,E)$, 若 $X\subseteq V$,

$$E_X=\{(u,v)\mid \forall u\in X,\ \forall v\notin X,\ (u,v)\in E\},$$

则，$C^*=C^*(X)=G[E_X]$ 被称为 G 的一个 上循环圈. 当 $X=\emptyset$ 或 $X=V$ 时，$C^*(X)$ 称为 空的, 也记为 $\emptyset$. 如果一个上循环没有非空真子图仍是上循环，则称为 上圈. 自然，任何上循环都含有一个上圈.

引理 2.1.4 令 T 是 G 上的一个树. T^* 为相应 T 的上树. 则，对于 T 的任何一边 e, 在 $T^*+e=(V,E(T^*)+e)$ 中恰有一个上圈.

证 设 $e=(u,v)$. 因为任何一个上圈都有 T 中的一条边. 故，在 T^* 中不含任何一个上圈. 又由于 T 的每一条边均为 T 的割边，则 $T-e$ 至少有二个连通片. 令 A 是含 u 的连通片的节点集. 容易看出，$C^*(A)$ 包含在 T^*+e 中. 如果还有一个上循环 $C^*(B)$ 在 T^*+e 之中，则 $C^*(B)$ 定包含 e. 然，这时 $C^*(A\cup B\setminus A\cap B)$ 包含 T^* 中的一个上圈. 因 T^* 上无上圈，故只能 $C^*(A)=C^*(B)$. ♮

由引理 2.1.3, 我们可以称由上树的一边与相应的树所确定的圈为 *基本圈*. 相仿地，由引理 2.1.4, 那些由一条树上的边与上树所确定的上圈为 *基本上圈*. 进而，还可以看出，不管怎样取图上的树，基本圈的数目均为 $\epsilon-\nu+1$, 即上树的度，或称 *基圈数*, 也称 *Betti 数*, 记为 $\beta(G)$. 相仿地，基本上圈的数目为 *上基圈数*, 记为 $\alpha(G)$. 事实上， $\alpha(G)=\nu-1$, 即 G 上之树的度.

定理 2.1.4 *连通图 G 的基本群为*

$$\pi_1(G)=\langle a_1,a_2,\cdots,a_\beta;--\rangle. \tag{2.1.1}$$

证 由定理 2.1.3, 令 T 是 G 上的一个树. 由定理 2.1.2 知，凡树均可收缩到一个点. 由引理 2.1.4, 收缩 T 而得到的图仅由 $\beta(G)$ 个环组成，记它们为 $a_1,a_2,\cdots,a_\beta$. 因此，任何迂 (或者在拓扑学中称为闭路) 均可由它们所生成. 这就是定理的结论. ▮

从 §1.4 中关于曲面的基本群的讨论，也许人们会想到图在曲面上的可嵌入性. 假若一个图可以看作是一个树与一个圈合成的. 其中的树已嵌入到平面上了且伴随一个码. 这个圈可按照在码上出现之次序连接树的所有显节点. 则称它为 *Halin* 图. 这个圈被称为它的 *外边界*. 当然，所有 Halin 图皆为平面的. 而且，还能证明任何 Halin 图都可嵌入到亏格为 $q=\beta(G)$ 的不可定向曲面上. 事实上，在图 2.1.1 中 (a) 所示的图 (更确切地， Halin 图) 有 (b) 所示的嵌入可以引伸到一般情形. 这个嵌入只有一个面，即

$$ac\gamma\alpha ba^{-1}\alpha\beta c^{-1}b^{-1}\beta\gamma.$$

容易验证, 它是不可定向的. 由 Euler 示性数断定为曲面 Q_q, $q=$

$\beta(G)$, 上的一个嵌入. 这个嵌入的对偶是

$$(a\alpha\gamma,\ a^{-1}cb^{-1},\ b\beta\alpha,\ c^{-1}\gamma\beta). \tag{2.1.2}$$

下一节将进一步讨论.

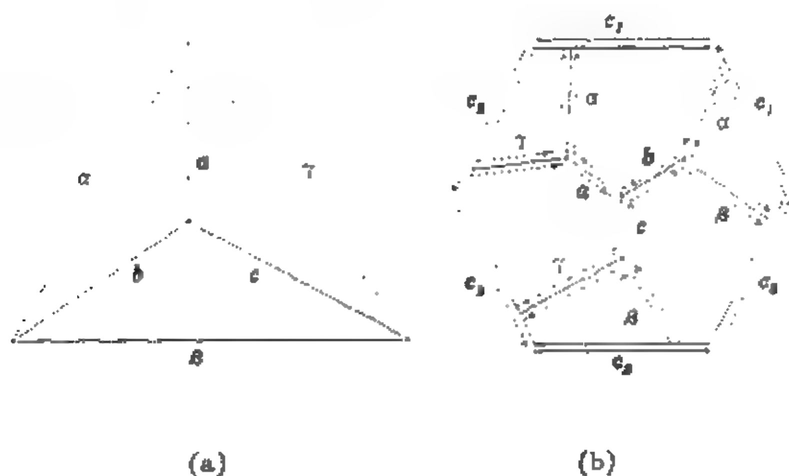


图 2.1.1

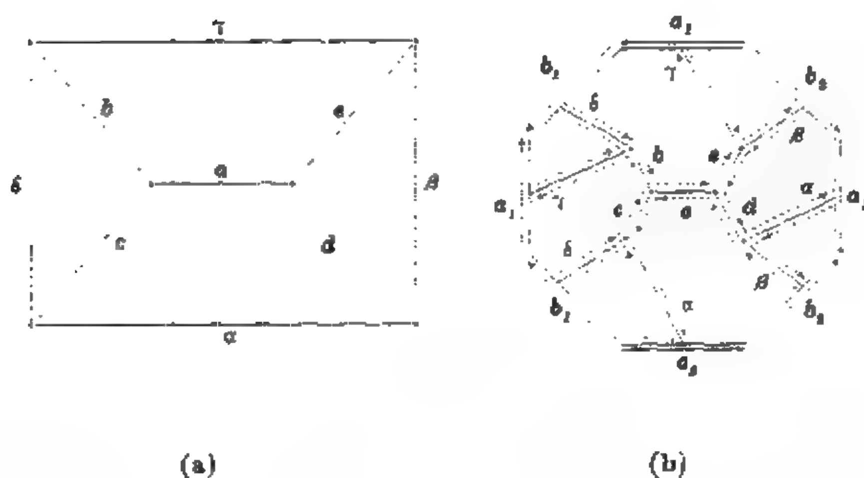


图 2.1.2

相仿地，也可以论证任何 Halin 图均可嵌入到亏格为 $p = \lfloor \beta(G)/2 \rfloor$ 的可定向曲面 P_p 上. 这里，也提供一个例子. 在图 2.1.2 中，(a) 所示的图有 (b) 所示的嵌入. 它也可引伸到一般 Halin 图的情形. 在全书中，对于任一个实数 x, 我们总用 $\lfloor x \rfloor$

表示不大于 x 的最大整数和 $\lceil x \rceil$ 为不小于 x 的最小整数. 分别称它们为 *下整数*(或 *地板*) 和 *上整数*(或 *天板*).

因为可以验证这个嵌入是可定向的并且只有一个面：

$$ac\alpha\beta ed\alpha^{-1}\delta ba^{-1}e^{-1}\gamma\delta^{-1}c^{-1}b^{-1}\gamma^{-1}\beta^{-1}d^{-1}. \tag{2.1.3}$$

由 Euler 示性数，它确是亏格为 $p = \lfloor\beta(G)/2\rfloor$ 的可定向曲面 P_p 上的一个嵌入. 其对偶为

$$(ae^{-1}d,\ a^{-1}cb^{-1},\ b\gamma^{-1}\delta^{-1},\ c^{-1}\alpha\delta,\ \alpha^{-1}\beta d^{-1},\ \beta^{-1}e\gamma).$$

§2.2 确向树与确向上树

对于图 G 上的一个树，或者说对于 G 的一个 *支撑树* T，如果存在对 G 的边的定向使得任一基本圈上的边均有相同的走向或者说为 *有向圈*, 或 *回路*, 则称 T 为一个 *准确向树*. 若一个上树 T^* 使 G 的边有一种定向具有性质：每一个基本上圈在 T^* 中的边全走向相同而与它在 T 上的那条边走向不同，也称之为 *有向上圈*, 则称之为 *准确向上树*. 当然，既不是所有的树皆准确向树，也不是所有上树皆准确向上树. 凡提及准确向树或准确向上树均指它们与所在的图已确定了边的方向.

定理 2.2.1 在图 $G=(V,E)$ 上的一个树 T 为准确向树当且仅当与它相应的上树 T^* 为准确向上树.

证 由于 T 为 G 上的一个准确向树，存在 G 上的边的定向使得所有的基本圈均为有向圈. 设 $C_e{}^*$ 是由 $e\in E(T)$ 与 T^* 形成的那个基本上圈和 A,B 为 $T-e$ 中的那二个连通片使边 e 的方向为从 A 到 B. 则，由引理 2.1.3, 在 $C_e{}^*$ 中的所有上树边皆从 B 到 A. 从而，T^* 是一个准确向上树. 反之，设 $C_e = ee_1e_2\cdots e_s$,

$e=(u,v), e_i=(v_{i-1},v_i), 1\le i\le s, v=v_0, v_s=u$, 为由 $e\in E(T^*)$ 与 T 形成的那个基本圈. 由引理 2.1.4, 所有上圈 $C^*_{e_i}$, $1\le i\le s$, 均含 e. 由于 T^* 为准确向上树, 在 $C^*_{e_1}$ 中 e 的方向与 e_1 的方向不同. 或者说 $e_1=\prec v,v_1\succ$ 当 $e=\prec u,v\succ$. 同样理由, $e_2=\prec v_1,v_2\succ,\cdots,e_s=\prec v_{s-1},u\succ$. 从而, 在基本圈上所有的边皆同向. 这就是说 T 是一个准确向树. ♮

这个定理使我们总可以只讨论准确向树. 如果一个节点 v 在准确向树上没有进入的边, 则 v 称为 T 的 源. 反之, 若一个节点只有进入的边, 则称它为 汇. 一个准确向树可以有两个以上的源. 若一个准确向树只有一个源, 则称它为 *确向树*. 一个上树, 若它所确定的树是确向树, 则称之为 *确向上树*.

引理 2.2.1 一个准确向树 T 在图 G 上是一个确向树, 当且仅当它有 $\nu-1$ 个节点使得每个均只有一条进入的边.

证 由 §2.1 中的 Tr.3, 必要性是显然的. 反之, 由 §2.1 中的 Tr.1, 那个仅有的例外节点是 T 的唯一的源. 这就得到了充分性. ♮

引理 2.2.2 若 T 是图 G 上的一个确向树, 则对于任何 $H\subseteq G, T_h=T\cap H$ 是 H 上的一个确向树当且仅当 T_h 是 H 上的一个树.

证 由于确向树本身是树, 必要性显然. 反之, 由于 H 中对于 T_h 的基本圈也为 G 对 T 的基本圈和 T_h 是一个树, 即可得充分性. ♮

引理 2.2.3 确向树 T 的一个节点是汇当且仅当是一个显节点仅当源为显节点时对于充分性例外.

证 因为确向树 T 只有一个源, 由 §2.1 中的 Tr.3, 任何一

节点有且仅有一条有向路由源指向它. 故，每一个显节点 (除源也为显节点外) 均必为汇. 这就是充分性. 反之，若有一个节点 v, 它是 T 的汇但不是显节点. 则由 T 有唯一的源，必有两条有向路从源指向 v. 与 §2.1 中的 Tr.3 矛盾. 从而，只能必要性成立. ▯

如果将一个准确向树 T 的所有边皆反向，则所得的有向树称为 T 的 *反向形*. 相仿地，可知一个准确向上树的反向形的意义.

定理 2.2.2 *一个准确向树 T 的反向形是准确向树和它是一个确向树当且仅当 T 只有一个汇. 一个确向树 T 的反向形是确向树当且仅当 T 本身是一条 Hamilton 路.*

证 由于有向图的反向形仍是有向圈，第一个说法的前半部是对的. 由于在 T 的反向形中，一个节点是源当且仅当它在 T 中是汇. 其后半部亦真. 因为路本身也是树，则有第二个说法的充分性. 由引理 2.2.3, 此确向树 T 只有二个显节点. 由 §2.1 中的 Tr.3, 即得必要性. ▯

为了在一个图上求确向树，我们要引进反射规则和调整 §2.1 中的旅行规则.

反射规则 *每当第一次沿一条边达到一个已访问过的节点，就沿此边返回并将此边标为 反射的.*

调旅规则 *即 §2.1 中的旅行规则，只要每到一个节点在此节点的旋中不计反射边.*

对于一个图 $G = (V, E)$, 如果旋 $\varrho(G)$ 已经给定，则可以根据上面的两条规则用如下的过程沿 G 的边旅行.

确向过程 选择节点 v_0 作为始点，与 v_0 关联的一条边 e_0 作为始边. 只要达到一个节点 v, 先用反射规则 (如可能) 再用调旅规则.

令 Dr 为在图 G 上用确向过程所得的字. 在这个字中，每一个字母表示 G 的一条边. 一个字母的幂为 1 (总是略之) 或 -1 分别表示第一次或第二次通过这个字母所代表的边. D 是由 Dr 中的所有非反射边组成的集合.

引理 2.2.4 *在 Dr 中的所有非反射边形成 G 上的一个树.*

证 由于注意到每当必需反射时，就在 G 中发现一个含有这个反射边的圈. 那个由所有 Dr 中非反射边在 G 中所导出的子图必连通且无圈. 从而，由 §2.1 中 Tr.1，$G(D)$ 是一个树. ♮

引理 2.2.5 *Dr 是一个多面形且 $Dr \sim_{El} P_0$.*

证 当在 Dr 中无反射边时，由引理 2.2.4 和定理 2.1.1, 引理为真. 假若 a 是一个反射边，则 Dr 具有形式： $Aaa^{-1}B$. 然，由 §I.5 中的 El.0, $Dr \sim_{El} AB$ 和由归纳假设，$AB \sim_{El} P_0$. 即得引理. ♮

定理 2.2.3 *一个图 $G=(V,E)$ 有一个确向树，当且仅当 G 是连通的.*

证 由于确向树本身是 G 的支撑树, 必要性显然. 反之, 由引理 2.2.4 和注意到在每个节点处，只要依确向过程通过与它关联的一边则与它关联的每一边都必通过二次. 从 G 的连通性即得所有非反射边的导出子图就是 G 上的一个确向树.

这就是充分性. □

由引理 2.2.4-5 和定理 2.2.3, 我们可以记 $Tod = G(D)$ 为 G 的确向树和 Tod^* 为由 Tod 所确定的确向上树. 令 Or 和 On 分别为确向过程在 G 上所得的所有反射边和所有非反射边的集合. 则 $E(Tod) = On$ 和 $E(Tod^*) = Or$. 以后，我们不区别边和代表它的字母. 多面形 Dr 被称为 G 的 *确向码*. 由引理 2.1.3-4, Tod^* 的度为 $\beta = \beta(G) = \epsilon - \nu + 1$ 和 Tod 的度为 $\alpha = \alpha(G) = \nu - 1$. 这就允许我们记 $Or = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdot, \gamma_\beta\}$ 和 $On = \{b_1, b_2, \cdots, b_\alpha\}$. 对于 $\gamma \in Or$, 可记

$$Dr = A_0abA\gamma\gamma^{-1}Bb^{-1}a^{-1}A_0^{-1}.$$

其中， $a,, b, \gamma \in E_v$, $v \in V$. 令

$$\varphi_\gamma(Dr) = A_0abA\gamma B^{-1}\gamma b^{-1}a^{-1}A_0^{-1}. \quad (2.2.1)$$

称这种运算为在 v 处的 *反射约化*, 在第十二章中我们将会看到它实际上是一种叉帽. 容易验证，它是不可交换的. 在合成运算中要考虑到次序. 进而，令

$$Dr_i = \prod_{j=1}^{i} \varphi_{\gamma_j} Dr, \ i = 1, 2, \cdots, \beta. \quad (2.2.2)$$

在 Dr 中，与反射边关联的显节点被称为 Dr 的 *反射节点*.

引理 2.2.6 在 (2.2.2) 中确定的 Dr_i, $i = 0, 1, 2, \cdots, \beta$, 是一个多边形. 它有一个面， $\epsilon - i + 1$ 个节点和 ϵ 条边.

证 当 $i = 0$ 时，由引理 2.2.5, 已经知道 $Dr \sim_{El} P_0$. 因此，有一个面， $\epsilon + 1$ 个节点和 ϵ 条边. 进而，由于反射约化保持面数和边数不变而且每次减少一个反射节点，即可得引理. □

引理 2.2.7 $\forall i(1 \le i \le \beta)$, $Dr_i \sim_{El} Q_i$.

证 当 $i=1$ 时, 设

$$Dr = A_0abA\gamma_1\gamma_1^{-1}Bb^{-1}a^{-1}A_0^{-1}.$$

因为

$$Dr_1 = \varphi_{\gamma_1} Dr = A_0abA\gamma_1B^{-1}\gamma_1b^{-1}a^{-1}A_0^{-1}.$$

由 (1.5.3) 中的第二个公式, 有

$$Dr_1 \sim_{El} A_0abABb^{-1}a^{-1}A_0^{-1}\gamma_1\gamma_1.$$

不管怎样, $A_0abABb^{-1}a^{-1}A_0^{-1} = Dr(G-\gamma_1)$. 由 §2.1 中的 El0,

$$Dr_1 \sim_{El} \gamma_1\gamma_1 = Q_1.$$

一般地, 由于 $Dr_i \sim_{El} Dr_{i-1}(G-\gamma_1)\gamma_1\gamma_1$ 和由归纳假设 $Dr_{i-1}(G-\gamma_1) \sim_{El} Q_{i-1}$, 再由 (1.5.3) 的第二个公式, 即可得引理. ◻

定理 2.2.4 令 $\mathcal{G}$ 为所有连通图的集合和 $\mathcal{T}$ 为所有树的集合, 则, $\forall G \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{T}$,

$$(G = G(Dr_\beta)) \wedge (G \propto Q_\beta) \wedge (Dr_\beta \subset Q_\beta). \tag{2.2.3}$$

证 因为中间的说法是前后二说法的一个直接推论. 只需证明前后二个说法. 由引理 2.2.6 的 $i=\beta$ 情形, 前一个说法为真. 由引理 2.2.7 的 $i=\beta$ 情形, 可得后一个说法. ◻

上面所用的求一个图 G 在亏格为 $\beta(G)$ 的不可定向曲面上的一个嵌入 $G(Dr_\beta)$ 的方法也可以推广到用于求 G 在亏格为 $\lfloor \beta(G)/2 \rfloor$ 的可定向曲面上的嵌入 (如果存在的话). 由于在这一情况下的复杂性, 只能留待第十二章中详论.

§2.3 注记

2.3.1 在文献中可以看到有很多求图的支撑树的算法，并已应用到运筹学 [BCL1] 和计算机科学中 [Knu1,Pf1]. 然，似乎是从 Hopcroft 和 Tarjan[HoT4-5] (也见 [Liu 1-2]) 开始，深探树，或者说 Tremaux 树变成一种有力的工具以在组合学特别是图论中求更有效的算法. 当然，在一百年以前，Tremaux 树就被用来解迷宫了 [Bal1].

2.3.2 除了深探树外，确向树还有其他的变形. 例如左探树和右探树用于图作为平面上的一个浸入或曲面上的嵌入时 [Liu19,22;FR2].

2.3.3 在 §2.2 中所展示的利用确向树的方法求一个图的不可定向最大亏格. 人们也许在文章 [Liu8-10] 中看到. 在那里还提供了求一个图在相应的曲面上的嵌入的有效算法.

2.3.4 证明定理 2.2.4 不一定非用确向树不可. 用一般的树可以想象也不会出现大的困难. 只不过就计算复杂性而论不会比确向树更好.

2.3.5 在一个图上节点标定的树的数目称为这个图的复杂度. 它可用不同的方法确定 [Cay1]. 然而，一个图上确向树的数目尚未得知，尽管有很多文章数各种树的数目.

2.3.6 在什么情形下和如何求一个图上的给定数目的无公共边的树，特别是将图分划为支撑树的无公共边的并. Tutte [Tut14] 和 Nash-Williams [Na1] 已经解决了一些有关问题. 然，一个图可以分划为确向树的充要条件尚属未知.

2.3.7 树也是纯数学中的一个重要概念 [Se1].

2.3.8 另一类确向树可以看作为广探树之推广. 在求一

个图的无回路定向，甚至带有一个源和一个汇的这种定向时也是重要的. 这就导出了在图上对节点的单向标数. 当然，源汇标数是单向标数在源与汇相邻时的特殊情形. 用它也可以导出判定图的平面性的线性算法. 若想看它们的一些应用，可参见 [CuL1, Liu28-29, LMS3].

第三章

图中的空间

§3.0 二分空间

所谓 $\boldsymbol{F}$ 上的一个空间(准确地说，向量空间或线性空间)，常记为 $(\mathcal{X},\boldsymbol{F};+,\cdot)$ (或简记 $\mathcal{X}$)，就是指一个 Abel 群 $(\mathcal{X},+)$，或同样地简记 $\mathcal{X}$，伴之以一个域 $(\boldsymbol{F},+,\cdot)$，或简记 $\boldsymbol{F}$，并满足下面的四条公理 Vect.1-4. 其中，二元运算 "+" 被称为*和*，"•" 为*标量积*. 在 Abel 群 $\mathcal{X}$ 上的和在域 $\boldsymbol{F}$ 上的加法用同样的记号. 标量积 $a \bullet A$，或简记 aA，是对于 $a \in \boldsymbol{F}$ 和 $A \in \mathcal{X}$ 的而且与 $\boldsymbol{F}$ 中的乘法用相同的记号. $\mathcal{X}$ 中的元称为*向量*和 $\boldsymbol{F}$ 中的元为*标量*.

Vect.1 $\forall a \in \boldsymbol{F}, \forall A, B \in \mathcal{X}, a(A+B) = aA + aB.$

Vect.2 $\forall a, b \in \boldsymbol{F}, \forall A \in \mathcal{X}, (a+b)A = aA + bA.$

Vect.3 $\forall a, b \in \boldsymbol{F}, \forall A \in \mathcal{X}, (ab)A = a(bA).$

Vect.4 $\forall A \in \mathcal{X}, 1A = A.$

似乎在空间的向量与标量之间需要说明的仅有在符号上的区别是分别用 $0_{\mathcal{X}}$ 和 $0_{\boldsymbol{F}}$ 表示 $\mathcal{X}$ 中的和 $\boldsymbol{F}$ 的零元. 然而，由公

理 Vect.1-4 可以看出，$\forall A \in \mathcal{X}, 0_{\boldsymbol{F}}A = 0_{\mathcal{X}}$ 和 $\forall a \in \boldsymbol{F}$, $a0_{\mathcal{X}} = 0_{\mathcal{X}}$, 这种区别总是可以略之不计，并简单地用 0 表示 $0_{\boldsymbol{F}}$ 和 $0_{\mathcal{X}}$. 域 $\boldsymbol{F}$ 上的空间 $\mathcal{X}$ 的一个子集 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$, 若 $\mathcal{Y}$ 本身也是一个空间并且其中的运算与 $\mathcal{X}$ 的相同，则称 $\mathcal{Y}$ 为 $\mathcal{X}$ 的一个 *子空间*, 记为 $\mathcal{Y} \subseteq_{\text{vect}} \mathcal{X}$ (或在不致混淆时简记 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$). 零元 0 属于任何空间而且它本身也是一个空间，称之为 *零空间* 或 *平凡空间*, 也用 0 表之. 任何一个非零二阶向量与 0 形成一个子空间并记为 $\mathcal{J}$.

定理 3.0.1 $\forall \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{Y} \subseteq_{\text{vect}} \mathcal{X} \Leftrightarrow & (\forall A, B \in \mathcal{Y}, A + B \in \mathcal{Y}) \\ & \wedge (\forall a \in \boldsymbol{F}, A \in \mathcal{Y}, aA \in \mathcal{Y}).\end{aligned}$$

证 必要性是直接的. 只证充分性. 因为 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$, 由后一个说法可知 Vect.2-4 成立和由前一个说法，Vect.1 成立. 从而，充分性得证. ▮

当然，对于空间我们也可以与群一样引进二个运算：$\cap$, 即交和 $\cup$, 即联 (见 § 1.4) 并由此得到一个格 $(2^{\mathcal{X}}, \subseteq; \cup, \cap)$. 自然，它也是完全的.

下面，我们只讨论 $\boldsymbol{F} = GF(2)$, 即二元域的情形. 这时的空间被称为 *二分空间* 或 *二元空间*. 对于任何 $A \in \mathcal{X}$ 总有 $A + A = 0$, 零向量. 或者说是特征为 2 的. 设 $\mathcal{X} = 2^X$ 是由 X 的所有元素生成的自由 Abel 群 $\langle x | \forall x \in X \rangle$. 则，一个向量同时也表示 X 的一个子集. 我们总是用同样的记号代表 $\mathcal{X}$ 中的向量和 X 中的子集. 令 $A \in \mathcal{X}$. 则有

$$A = \sum_{x \in X} A_x x = \sum_{x \in A} x, \tag{3.0.1}$$

其中 A_x 称为 A 在 x 上的 *系数*, 或 *分量*. 当然， $A_x = 1$, 当 $x \in A$; 0, 否则.

在空间 $\mathcal{X}$ 上，我们定义 *内积*, 用 (A, B), $A, B \in \mathcal{X}$, 表示，为

$$(A, B) = \sum_{x \in X} A_x B_x. \tag{3.0.2}$$

用内积的形式，我们有

$$A_x = (A, x), \forall x \in X. \tag{3.0.3}$$

如果 $A, B \in \mathcal{X}, (A, B) = 0$, 则称 A 和 B 是 *正交的*. 并用 $A \perp B$ 对称地 $B \perp A$ 表示 (因为 $(A, B) = (B, A)$). 至此，可以看出： $\forall A, B \in \mathcal{X}$,

$$(A, B) = 0 \Leftrightarrow |A \cap B| = 0 \pmod 2. \tag{3.0.4}$$

若 $(A, A) = 0$, 则称 A 是 *偶的*. 令 $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ 为 $\mathcal{X}$ 中所有偶向量的集合. 由公理 Vect.1–4, 可以验证 $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ 是 $\mathcal{X}$ 的一个子空间. 并称之为 X 上的 *交错空间*. 进而，还可以看出：对于给定的 $A \in \mathcal{X}$,

$$A = 0 \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{X}, (A, B) = 0. \tag{3.0.5}$$

或者说，这里的内积是 *非退化的*.

若一个向量 A 满足 $\forall B \in \mathcal{B}, (A, B) = 0$ 则称 A 与 $\mathcal{B}$ *正交*, 记为 $A \perp \mathcal{B}$.

令 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{X}$ 的二个子空间. 若

$$\mathcal{A} = \{A |\ \forall A \in \mathcal{X}, A \perp \mathcal{B}\}, \tag{3.0.6}$$

则称 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{B}$ 的在 $\mathcal{X}$ 中的 *正交空间*, 记为 $\mathcal{A} = \mathcal{B}^{\perp}$. 而且，由内积的对称性，有

$$(\mathcal{B}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{B}. \tag{3.0.7}$$

在这一章中，我们将会看到与图有关的一些空间．几乎所有对于这些空间的结果全可延伸到一般的二分空间上．

§3.1 循环，上循环和双循环

令 $G=(V,E)$ 是 $\nu=|V|$ 阶 $\epsilon=|E|$ 度的图．一个迂的集合 F, $|F|=\varphi$, 还具有这样的性质： E 中的每条边在 F 的元素中恰出现二次．当然， F 总是不加伸明地假定只要 G 是连通的即表示 G 的一个准基形．这时， F 的元素被称为 面．

令 $\mathcal{G}_0=2^V$, $\mathcal{G}_1=2^E$, 和 $\mathcal{G}_2=2^F$ 分别为由节点集 V, 边集 E ，和面集 F 生成的空间 $\langle v|\forall v\in V\rangle$, $\langle e|\ \forall e\in E\rangle$, 和 $\langle f|\ \forall f\in F\rangle$ 并分别称它们为 G 上的 V-空间, E-空间, 和 F-空间．这里，我们只集中讨论 E- 空间的结构．若 G 是不连通的，设 $G=G_1+G_2+\cdots+G_\omega$. 则， $\mathcal{G}_i(G)=\mathcal{G}_i(G_1)+\mathcal{G}_i(G_2)+\cdots+\mathcal{G}_i(G_\omega)$ 且 $\mathcal{G}_i(G_l)\cap\mathcal{G}_i(G_s)=0$, 即平凡空间， $1\le l<s\le\omega$, $i=0,1,2$. 这就允许我们如无特别的需要只研究连通图的空间．

如果一个边 $e\in E$ 的 *边界* $\partial_1 e$ 定义为它们两个关联节点 (所相应的向量) 之和，则定义在 $\mathcal{G}_1$ 的基上的 ∂_1 可以被延拓为， $\partial_1:\mathcal{G}_1\to\mathcal{G}_0$ 被称为 *1-边缘映象* 如下

$$\forall A\in\mathcal{G}_1, \partial_1 A=\sum_{e\in A}\partial_1 e. \tag{3.1.1}$$

因为 ∂_1 是从 $\mathcal{G}_1$ 到 $\mathcal{G}_0$ 的一个同态，即， $\partial_1\in\mathrm{Hom}\,(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_0)$. 容易证明， $\mathrm{Ker}\,\partial_1$ 为 $\mathcal{G}_1$ 的一个子空间．并称之为 G 的 *1-循环空间*. 相仿地， $\mathrm{Im}\,\partial_1$ 是 $\mathcal{G}_0$ 的一个子空间．并称之为 G 的 *0-边缘空间*. 若 E 的一个子集 A 是无公共边的圈的并，则称它为 G 的一个 *循环*. 令 C 是 G 的所有循环组成的集合．

定理 3.1.1 $\mathrm{Ker}\,\partial_1=C$.

证 因为对任何 $A \in Ker\ \partial_1$,

$$\partial_1 A = \sum_{e\in A} \partial_1 e = 0,$$

在 $G[A]$ 中所有节点皆偶次. 由定理 1.3.6, $G[A]$ 的每个连通片皆为回. 然, 任何回皆无公共边的圈之并. 从而, $A \in \mathcal{C}$. 反之, 对任何 $A \in \mathcal{C}$, 因为所有节点在 A 中均与偶数条边关联, 由 (3.0.4.) 可知 $A \in \text{Ker}\ \partial_1$. ▯

根据定理 3.1.1, $\mathcal{C}$ 被称为 G 的 *循环空间*. 相仿地, 一个节点 $v \in V$ 的 *上边缘* $\delta_0 v$ 定义为所有与它关联的边在 $\mathcal{G}$ 中之和. 即, 有

$$\forall e \in E,\ (e, \delta_0 v) = (\partial_1 e, v). \tag{3.1.2}$$

则, δ_0 可以从 $\mathcal{G}_0$ 的一个基上延拓为整个 $\mathcal{G}_0$ 上的一个线性变换 $\delta_0 : \mathcal{G}_0 \to \mathcal{G}_1$ 使得

$$\forall A \in \mathcal{G}_0,\ \delta_0 A = \sum_{v\in A} \delta_0 v. \tag{3.1.3}$$

并称 δ_0 为 *0-上边缘映象*.

由 (3.1.2) 和内积对于 ∂_1 和 δ_0 的双线性性, 有如下的更一般的关系:

$$\forall B \in \mathcal{G}_0, \forall A \in \mathcal{G}_1, (A, \delta_0 B) = (\partial_1 A, B). \tag{3.1.4}$$

由 $\delta_0 \in \text{Hom}\ (\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1)$ 和定理 3.0.1 可知, $\text{Im}\ \delta_0$ 是 $\mathcal{G}_1$ 的一个子空间. 并称它为 G 的 *1-上边缘空间*. 同样地, $\text{Ker}\ \delta_0$ 是 $\mathcal{G}_0$ 的一个子空间, 并称它为 G 的 *0-循环空间*.

引理 3.1.1. $\forall A \in \text{Ker}\ \partial_1, \forall B \in \text{Im}\ \delta_0,\ (A.B) = 0.$

证 由于 $B \in \mathrm{Im}\,\delta_0, \exists X \in \mathcal{G}_0, B = \delta_0 X$. 由 (3.1.4), $(A, B) = (A, \delta_0 X) = (\partial_1 A, X)$. 再由 $A \in \mathrm{Ker}\,\partial_1, \partial_1 A = 0$. 从而，引理得证. ♮

基于引理 3.1.1 和定理 1.3.7, 我们知 $\mathrm{Im}\,\delta_0 = C^{\perp}$. 令 C^* 为 G 的所有上循环的集合.

定理 3.1.2 $C^{\perp} = C^*$.

证 由于 $\mathrm{Im}\,\delta_0 = C^{\perp}$ 和对于 $A \in \mathcal{G}_0$ 有 $\delta_0 A \in C^{\perp}$ 和

$$\delta_0 A = E_A = \{(u, v) | \forall u \in A, \forall v \notin A\},$$

从而， $\delta_0 A \in C^*$. 反之，对任何 $X \in C^*$, 设 $X = E_A, A \in \mathcal{G}_0$; 则， $X = \delta_0 A \in C^{\perp}$. 从而，定理得证. ♮

根据定理 3.1.2, $C^{\perp} = \mathrm{Im}\,\delta_0$, 即 1- 上边缘空间，也可称为 G 的 *上循环空间*. 由于 $C = \mathrm{Ker}\,\partial_1$ 和 $C^{\perp}$ 均为空间. $0 \in C \cap C^{\perp}$. 一般而论，在 $C \cap C^{\perp}$ 中允许有非零向量. 况且，二个空间之交也是它们的子空间. 则， $\mathcal{B} = C \cap C^{\perp}$ 被称为 G 的 *双循环空间*. $\mathcal{B}$ 中的非零元素称为 *双循环*.

定理 3.1.3 $\dim C + \dim C^{\perp} = \epsilon (= \dim \mathcal{G}_1)$.

证 假设 C 的维数为 $r, 0 \le r \le \epsilon$, 和记 $\{e_1, e_2, \cdots, e_\epsilon\}$ 引伸出 C 上的一个有序基 $\{C_1, \cdots, C_r\}$. 同时，$\mathcal{G}_1$ 的基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_\epsilon\}$ 也确定了次序. 就是说限定 $e_i \in C_i, e_i \notin C_j, j \ne i, 1 \le i, j \le r$. 由 (3.0.5.), ${\mathcal{G}_1}^{\perp} = 0$. 则， $\{e_{r+1}, \cdots, e_\epsilon\}$ 可以引伸出 $C_i^* \in C^{\perp}, r+1 \le i \le \epsilon$, 且满足 $e_i \in C_i^*$, 但 $e_i \notin C_j^*, j \ne i, r+1 \le i, j \le \epsilon$. 因此， $\{C_{\epsilon+1}^*, \cdots, C_\epsilon^*\}$ 为 $C^{\perp}$ 的一个基. 这就得到了定理. ♮

由定理，虽然 C 和 $C^{\perp}$ 的维数和等于 $\mathcal{G}_1$ 的维数，但它并不意味 $\mathcal{G}_1$ 的任何一个向量均可以表示为 C 中的一个向量与 $C^{\perp}$

中的一个向量之和. 事实上, 如果 $B \in \mathcal{B}, B \neq 0$, 则 B 中的每一条边均非这样的二个向量之和.

定理 3.1.4 $\mathcal{B}^{\perp} = \mathcal{C} + \mathcal{C}^{\perp}$.

证 因为

$$\begin{aligned} A \in (\mathcal{C} + \mathcal{C}^{\perp})^{\perp} &\Leftrightarrow (A \perp \mathcal{C}) \wedge (A \perp \mathcal{C}^{\perp}) \\ &\Leftrightarrow (A \in \mathcal{C}^{\perp}) \wedge (A \in \mathcal{C}) \\ &\Leftrightarrow A \in \mathcal{B}, \end{aligned}$$

由 (3.0.7), 即得定理. ♮

§3.2 循环空间

令 $G = (V, E)$ 为一个图, 如不特别申明总是指连通的, 和 $\mathcal{C}$ 为 G 的循环空间. 如果 E 的子集 J 满足条件: $\forall C \in \mathcal{C}$, $C \cap J \neq \emptyset$, 则 J 被称为 $\mathcal{C}$ 的 联集. 如果 $\mathcal{G}$ 的一个联集具有这样的性质: 它的每个真子集在 E 中之补均含一个非空循环, 则称它为 $\mathcal{C}$ 的一个 极小联集, 常用 $R(\mathcal{C})$, 或简单地, 用 R 表示之.

引理 3.2.1 令 $\mathcal{R}$ 为 $\mathcal{C}$ 的所有极小联集组成的集合和 $\mathcal{T}^*$ 是 G 上的所有上树的集合. 则 $\mathcal{R} = \mathcal{T}^*$.

证 设 $R \in \mathcal{R}$. 记 $\bar{R} = E \backslash R$. 假若在 R 中有一个非空上循环, 则由引理 3.1.1, 即与所有循环的正交性和 R 的极小性, 这个上循环只能是由一条割边组成. 但, 由极小性, R 绝不含任何割边. 从而, R 中不含任何非空上循环. 这就由 G 的连通性知 $G[\bar{R}]$ 也是连通的. 进而, 由 R 为 $\mathcal{C}$ 的一个联集可知, $\bar{R}$ 中没有非空循环, 因此也就没有圈. 由 §2.1 中的 Tr.1 可知, $\bar{R}$ 是一个树. 从而, $R \in \mathcal{T}^*$. 反之, 由引理 2.1.3 容易看出上树是 $\mathcal{C}$ 的一个极小联集. ♮

令 T 是图 $G=(V,E)$ 上的一个树. 假设 E 中的边排为 $\{e_1,e_2,\cdots,e_\epsilon\}$ 使得 $\{e_1,e_2,\cdots,e_{\epsilon-\nu+1}\}$ 形成上树 T^* 和 $\{e_{\epsilon-\nu+2},\cdots,e_\epsilon\}$ 自然形成树 T.

引理 3.2.2 令 $\{C(i)|\ \forall i(1\le i\le\epsilon-\nu+1),C(i)=C(e_i)\}$ 为对于 T 的所有基本圈的集合. 则, 在 $\mathcal{C}$ 中它是一个线性无关集.

证 $\forall\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{\epsilon-\nu+1}\in GF(2)$,

$$\sum_{i=1}^{\epsilon-\nu+1}\alpha_iC(i)=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{\epsilon-\nu+1}\alpha_ie_i=0$$

$$\Leftrightarrow\forall i(1\le i\le\epsilon-\nu+1),\alpha_i=0.$$

从而, 引理得证. ♮

引理 3.2.3 $\forall C\in\mathcal{C},\exists\alpha_i(1\le i\le\epsilon-\nu+1)\in GF(2)$,

$$C=\sum_{i=1}^{\epsilon-\nu+1}\alpha_iC(i).$$

证 假设 $\{e_{i_1},\cdots,e_{i_s}\}=\{e_i|\ \forall i(1\le i\le\epsilon-\nu+1),(C,e_i)=1\}$. 则

$$C=\sum_{j=1}^{s}C(i_j). \tag{3.2.1}$$

否则, 若 $\tilde{C}=\sum_{j=1}^{s}C(i_j)$ 但 $\tilde{C}\ne C$, 则 $0\ne C+\tilde{C}\in\mathcal{C}$. 然而, $C+\tilde{C}=(C\cup\tilde{C})\backslash(C\cap\tilde{C})\subseteq T$. 这就与 §2.1 中的 Tr.1 矛盾. 因此, 只能有 (3.2.1), 即引理成立. ♮

定理 3.2.1 所有对于树 T 的基本圈形成 G 中循环空间 $\mathcal{C}$ 的一组基.

证 由引理 2.2.2-3 直接导出. ♮

由于基本圈的数目就是 $\beta(G)=\epsilon-\nu+1$, 我们有循环空间 $\mathcal{C}$ 的维数

$$\dim\mathcal{C}=\beta(G). \tag{3.2.2}$$

也称之为 G 的 上秩(或 零秩).

在循环空间 $\mathcal{C}$ 的基础上, 可以在 $\mathcal{G}_1$ 上定义一个二元关系, 用 $\sim_{\text{cycl}}$ 表示, 如下: $\forall A,B\in\mathcal{G}_1$,

$$A\sim_{\text{cycl}}B\Leftrightarrow\exists C\in\mathcal{C},A+B=C. \tag{3.2.3}$$

由 §1.2 中的 $O1,\bar{O}2$ 和 $O3$. 容易验证 $\sim_{\text{cycl}}$ 是 $\mathcal{G}_1$ 上的一个等价. 进而, 由定理 3.1.1, $\mathcal{C}$ 对于 $\mathcal{G}_1$ 的商群

$$\mathcal{G}_1/\mathcal{C}=\mathcal{G}_1/\sim_{\text{cycl}} \tag{3.2.4}$$

也可以看作为 $\mathcal{G}_1$ 的一个子空间, 并称它为 $\mathcal{G}_1$ 中 $\mathcal{C}$ 的 商空间.

定理 3.2.2 $\mathcal{G}_1=\mathcal{C}+\mathcal{G}_1/\mathcal{C}$

证 对于任何 $e\in E$, 若 e 在一个循环 C 上, 则由 (3.2.3) 可知 $\exists B\in\mathcal{G}_1/\mathcal{C},e=C+B$. 否则, 由 $e\in\mathcal{G}_1/\mathcal{C}$, $e=e+0$, $0\in\mathcal{C}$. 对于任何 $A\in\mathcal{G}_1$, 设

$$A=\sum_{e\in A}e$$

和

$$e=D(\mathcal{C};e)+B(\mathcal{G}_1/\mathcal{C};e).$$

其中,

$$D(\mathcal{C},e)\in\mathcal{C},B(\mathcal{G}_1/\mathcal{C};e)\in\mathcal{G}_1/\mathcal{C}.$$

则, 由线性性,

$$\begin{aligned}A&=\sum_{e\in A}\big(D(\mathcal{C};e)+B(\mathcal{G}_1/\mathcal{C};e)\big)\\&=D(\mathcal{C};A)+B(\mathcal{G}_1/\mathcal{C};A).\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

其中，

$$\begin{cases} D(\mathcal{C};A)=\sum\limits_{e\in A}D(\mathcal{C};e)\in\mathcal{C}; \\ B(\mathcal{G}_1/\mathcal{C};A)=\sum\limits_{e\in A}B(\mathcal{G}_1/\mathcal{C};e)\in\mathcal{G}_1/\mathcal{C}. \end{cases}$$

这就得到了定理. ♮

相仿的理由，使我们还可以得到 $\mathcal{C}/\mathcal{B},\mathcal{B}=\mathcal{C}\cap\mathcal{C}^{\perp}$，是双循环空间 $\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{C}$ 中的商空间和 $\mathcal{G}_1/\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{G}_1$ 中的商空间. 进而，与定理 3.2.2 相仿地，也可得

$$\mathcal{C}=\mathcal{B}+\mathcal{C}/\mathcal{B}; \tag{3.2.6}$$

$$\mathcal{G}_1=\mathcal{B}+\mathcal{G}_1/\mathcal{B}. \tag{3.2.7}$$

定理 3.2.3 $\mathcal{G}_1/\mathcal{C}\cong(\mathcal{G}_1/\mathcal{B})/(\mathcal{C}/\mathcal{B})$.

证 由定理 1.4.4 (第三同构定律)，对于 $\mathcal{G}_1/\mathcal{C},\mathcal{G}_1/\mathcal{B}$，和 $\mathcal{C}/\mathcal{B}$ 作为群，定理中之关系满足. 而且，不难验证，上面作为群间的同构可以自然地延拓到相应的空间之间. 因此，即得定理.

♮

定义 0–边缘映象 $\partial_0:\mathcal{G}_0\to\mathcal{J}$ 为 $\forall A\in\mathcal{G}_0$，

$$\partial_0 A=\begin{cases}0, \text{当 } A\in\mathcal{A}(\mathcal{G}_0);\\ 1, \text{否则}.\end{cases}$$

其中，$\mathcal{A}(\mathcal{G}_0)$ 为 $\mathcal{G}_0$ 中的交错空间和用 0 和 1 代表 $\mathcal{J}$ 中的二个向量. 可见 $\mathrm{Ker}\ \partial_0=\mathcal{A}(\mathcal{G}_0)$. 这里，称 $\mathrm{Ker}\ \partial_0$ 为 G 的 0-循环空间和 $\mathrm{Im}\ \partial_0$ 为 G 的 (-1)-边缘空间. 自然，$\mathrm{Im}\ \partial_0=\mathcal{J}$.

引理 3.2.4 $\mathrm{Im}\ \partial_1=\mathrm{Ker}\ \partial_0$ 当且仅当 G 是连通的.

证 由定理 1.3.2 可知对任何 $A\in\mathcal{G}_1$，$\partial_1 A\in\mathcal{A}(\mathcal{G}_0)$. 故，$\mathrm{Im}\ \partial_1\subseteq\mathrm{Ker}\ \partial_0$. 进而，容易看出 $\{v+u|\ \forall u\in\mathcal{G}_0, v\in\mathcal{G}_0\}$ 含有

$\mathcal{A}(\mathcal{G}_0)$ 的一组基. 然而, $u+v \in \text{Im } \partial_1$ 当且仅当在 G 中存在一条路 $P(u,v)$. 这就得到了必要性. 反之, 由于对任何二节点 u,v, 存在一条连它们的路 P 和 $\partial_1 P = u+v$. 从 Im ∂_1 为一个空间可知必有 $\text{Im } \partial_1 = \mathcal{A}(\mathcal{G}_0) = \text{Ker } \partial_0$. 这就是充分性. ♮

引理 3.2.5 $\mathcal{G}_1/\mathcal{C} \cong \text{Ker } \partial_0$, 当且仅当 G 是连通的.

证 由定理 1.4.2 (第一同构定律), $\mathcal{G}_1/\mathcal{C} = \mathcal{G}_1/\text{ Ker } \partial_1 \cong \text{Im } \partial_1$. 从而, 由引理 3.2.4, 即得引理. ♮

因为, Im ∂_1 是 Ker ∂_0 的一个子空间 (当然, 由可交换向必为正规的), 则 $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0(G; GF(2)) = \text{Ker } \partial_0/\text{ Im } \partial_1$, 即 Im ∂_1 在 Ker ∂_0 中的商空间被称为 G 的 0-同调空间.

定理 3.2.4 $\mathcal{H}_0 = 0$, 当且仅当 G 是连通的.

证 由引理 3.2.4 直接导出. ♮

相类似地, 我们定义面 $f \in F$ 的边界 $\partial_2 f$ 为所有与它关联的边在 $\mathcal{G}_1$ 中之和. 当然, ∂_2 也可以从 $\mathcal{G}_2$ 的基上所定义的延拓到整个空间 $\mathcal{G}_1$ 上的一个线性变换 $\partial_2 : \mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}_1$ 使得

$$\forall A \in \mathcal{G}_2,\ \partial_2 A = \sum_{f \in A} \partial_2 f. \tag{3.2.8}$$

称 ∂_2 为 2-边缘映象. 同样易证在空间的意义下, 仍有 $\partial_2 \in \text{Hom }(\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_1)$. 从而, Im ∂_2 是 $\mathcal{G}_2$ 的一个子空间. 我们称之为 G 的 1-边缘空间.

引理 3.2.6 $\partial_1 \partial_2 = 0$.

证 因为对于任何 $f \in F, \partial_2 f$ 是 $\mathcal{G}_1$ 中的一个循环. 由于 Im ∂_2 是一个空间, 对于任何 A, 按 (3.2.8) 所示, $\partial_2 A$ 也是 $\mathcal{G}_1$ 中的一个循环. 故, $\text{Im } \partial_2 \subseteq \mathcal{C}$. 然, 由定理 3.1.1, $\mathcal{C} = \text{Ker } \partial_1$.

从而，$\partial_1\partial_2 A = 0$. ♮

对于图 $G=(V,E)$, F 为给定的迂的集合. 可选另外一个图 $G^*=(V^*,E^*)$ 和 F^* 按如下方式定义：

$$\begin{cases} V^* = F; \quad F^* = V; \\ e^* = (f_1, f_2) \in E^* \\ \qquad \Leftrightarrow \exists e \in E, (\partial_2 f_1, e) = (\partial_2 f_2, e) = 1. \end{cases} \tag{3.2.9}$$

这时，e 和 e^* 称为相应的边对. 注意，即便 G 没有环，G^* 也允许有环. 且，G^* 的环相应这样的边 e, 它仅与唯一的 $f \in F$ 关联. 称 G^* 为 G 的对偶. 显见，G^* 的 V-空间 $\mathcal{G}_0^* = 2^{V^*}$ 与 G 的 F-空间 $\mathcal{G}_2$ 同构和 $\mathcal{G}_2$ 的 2- 边缘映象 ∂_2 相应 $\mathcal{G}_0^*$ 的 0- 上边缘映象 δ_0^*. 而且，$\mathcal{G}_1^* \cong \mathcal{G}_1$ 和 $\mathcal{G}_2^* \cong \mathcal{G}_0$. 其中，$f^* \in F^*$ 在 G^* 上由在 G 上的相应节点 $v \in V$ 所确定. 另外，还易见 $(G^*)^* = G$.

引理 3.2.7 $\mathrm{Im}\ \partial_2 \cong \mathcal{A}(\mathcal{G}_2)$, 当且仅当 G 是连通的.

证 因为可以论证 $\mathrm{Ker}\ \partial_2 = \{0, F\} \cong \mathcal{J}$ 当且仅当 G 是连通的. 由定理 1.4.2(第一同构定律), $\mathcal{G}_2/\ \mathrm{Ker}\ \partial_2 \cong \mathrm{Im}\ \partial_2$. 而且，我们有 $\mathcal{G}_2/\ \mathrm{Ker}\ \partial_2 \cong \mathcal{A}(\mathcal{G}_2)$. 从而，导致定理成立. ♮

引理 3.2.8 一个连通图 G 是可平面的，当且仅当 $\mathcal{C} \cong \mathcal{A}(\mathcal{G}_2)$.

证 假若 G 是可平面的. 由于这时的 Euler 示性数为 2, 有 $\varphi = \epsilon - \nu + 2$. 故，$\mathrm{Im}\ \partial_2$ 含 $\mathcal{C}$ 的一组基. 因为总有 $\mathrm{Im}\ \partial_2 \subseteq \mathcal{C}$, 只能 $\mathrm{Im}\ \partial_2 = \mathcal{C}$. 再由引理 3.2.7 可知 $\mathcal{C} \cong \mathcal{A}(\mathcal{G}_2)$. 这就得到了必要性. 反之，若 $\mathcal{C} \cong \mathcal{A}(\mathcal{G}_2)$, 则由引理 3.2.7 得 $\mathrm{Im}\ \partial_2 = \mathcal{C}$. 由于 $\dim\ \mathcal{C} = \epsilon - \nu + 1$, 只能有 $\varphi = |F| = \epsilon - \nu + 2$. 这就是说

由 F 所确定的多面形 $\Sigma = \Sigma(G;F)$ 的 Euler 示性数为 2. 故, $G \cong G(\Sigma) \subset P_0$. 即, G 是可平面的. ♮

根据引理 3.2.6, Im ∂_2 是 $\mathcal{C}$ 的一个子空间. 这就使我们可以定义 G 的一个 1-同调空间 为 Ker ∂_1/ Im $\partial_2 = \mathcal{C}/\text{Im } \partial_2$. 且用 $\mathcal{H}_1(\Sigma;GF(2))$ 表示. 其中, Σ 为以 G 为基准图的多面形.

定理 3.2.5 一个连通图 G 是可平面的, 当且仅当存在迂的集合 F 使得 $\mathcal{H}_1 = 0$.

证 由引理 3.2.7-8 直接导出. ♮

若多面形 $\Sigma \subset S \in \mathcal{S}$, 即 Σ 为曲面 S 上的多面形, 则由 (3.2.9) 所确定的对偶 G^* 被称为 G 的 S-对偶. 特别地, 若 S 是球面 P_0, 则 G^* 称为 G 的 平面对偶. 由 §1.6 和上面所讨论的, 下面的推论可直接导出.

推论 3.2.1 一个连通图是可平面的, 当且仅当在 G 上存在迂的集合 F 使得 Euler 示性数$\chi(\Sigma(G;F)) = \nu - \epsilon + \varphi = 2$. ♮

事实上, 这个推论就是由 MacLane [M1-2] 首先发现的图的平面性的表征之一般情形. 下面的推论相当 Whitney 的平面性表征 [Wht 6-7].

推论 3.2.2 一个连通图 G 是可平面的, 当且仅当 G 有一个平面对偶. ♮

更一般地, 下面的二个推论可以表征一个图在一个曲面上的可嵌入性. 它们中的前一个应归功于 Lefschets [Lef 1-2].

推论 3.2.3 一个连通图 G 可嵌入到一个曲面 S 上, 当且仅当存在一个迂的集合 F 使得 $\chi(\Sigma(G;F)) = \chi(S)$. ♮

推论 3.2.4 一个连通图 G 可嵌入到曲面 S 上，当且仅当 G 有一个 S - 对偶. ♮

§3.3 上循环空间

对于图 $G(V,E)$ 的上循环空间 $\mathcal{C}^{\perp}$, 若 E 的一个子集 J^* 满足： $\forall C^* \in \mathcal{C}^{\perp}, C^* \cap J^* \neq \emptyset$, 则称它为 $\mathcal{C}^{\perp}$ 的一个 *联集*. 若 $\mathcal{C}^{\perp}$ 的联集 J^* 的任一真子集在 E 中之补皆含非空的上循环，则称它为 $\mathcal{C}^{\perp}$ 的 *极小联集*. 并用 $R^*(\mathcal{C}^{\perp})$ 表之，或简记为 R^*. 容易验证，图 G 上的任何一个树皆 $\mathcal{C}^{\perp}$ 的一个极小联集.

引理 3.3.1 令 $\mathcal{R}^*$ 为 $\mathcal{C}^{\perp}$ 的所有极小联集的集合和 $\mathcal{T}$ 为 G (当然，连通的) 上的所有树的集合. 则， $\mathcal{R}^* = \mathcal{T}$.

证 首先, 我们证明对任何 $R^* \in \mathcal{R}^*$, R^* 皆无圈. 否则, 假若 $C \subseteq R^*$ 是一个圈，则由极小性，对于任何 $e \in C$, $E\backslash(R^* - e)$ 有一个上循环 C^*. 因为 R^* 是 $\mathcal{C}^{\perp}$ 的联集，必有 $e \in C^*$. 然，由引理 3.1.1, 即 C 与 C^* 的正交性，必有 $e' \in C - e$, 由此 $e' \notin E\backslash(R^* - e)$ 使得 $e' \in C^*$. 这就与 $C^* \subseteq E\backslash(R^* - e)$ 矛盾. 然后，我们证明对任何 $R^* \in \mathcal{R}^*$, $G[R^*]$ 是连通的. 否则，假设 $G[R^*] = G_1 + G_2$, 就有 $E_{V(G_1)} \in \mathcal{C}^{\perp}$. 然， $E_{V(G_1)} \subseteq E\backslash R^*$. 与 R^* 是 $\mathcal{C}^{\perp}$ 的联集矛盾. ♮

基于这个引理，与引理 3.2.2-3 相仿地可以证明对于一个树的所有基本上圈的集合形成上循环空间 $\mathcal{C}^{\perp}$ 的一组基. 假设 $\mathcal{G}_1$ 的基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_{\nu-1} e_\nu \cdots e_\epsilon\}$ 中之向量安排了次序使得 $\{e_1, e_2, \cdots, e_{\nu-1}\}$ 形成 G 上的一个树. 令 $C^*(i) = C^*_{e_i}$, $1 \leq i \leq \nu - 1$, 为由 e_i 与相应 T 的上树 T^* 形成的基本上圈. 则，我们

有： $\forall C^* \in \mathcal{C}^\perp$,

$$C^* = \sum_{\substack{(C^*,e_i)=1\\ 1\le i\le \nu-1}} C^*(i). \tag{3.3.1}$$

从而，由定理 3.1.3 和定理 3.2.1, $\{C^*(i)|i=1,\cdots,\nu-1\}$ 形成 $\mathcal{C}^\perp$ 的一组基. $\mathcal{C}^\perp$ 的维数 $\nu-1$ 也称为 G 的 *秩*.

当然，$\mathcal{C}^\perp$ 的一个极小联集，或者说 G 上的一个树，可以确定 $\mathcal{C}^\perp$ 的一组基，即对于这个树的所有基本上圈的集合. 但，并不是说 $\mathcal{C}$ 的所有基全具有这种形式. 从而，G 上的树的数目只提供了 $\mathcal{C}^\perp$ 上基的数目的一个下界. 事实上，容易证明，对于任何 $\nu-1$ 个节点 v, 这 $\nu-1$ 个 E_v 也形成 $\mathcal{C}^\perp$ 的一组基. 然，一般而言，它们不会是对于某树的所有基本上圈.

定理 3.3.1 $\mathcal{C}^\perp = \mathrm{Im}\ \delta_0$, 即 G 的 1- 上边缘空间.

证 由于 $\delta_0 v = E_v$ 和任何 $\nu-1$ 个节点 v 的所有 E_v 形成 $\mathcal{C}^\perp$ 的一组基，从 δ_0 的定义即可得定理. ▯

对于给定的上循环空间 $\mathcal{C}^\perp$, 与 §3.2 中讨论循环空间一样，我们也可以看出 $\mathcal{G}_1/\mathcal{C}^\perp$ 也是一个空间，而且有如下的关系：

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{C}^\perp + \mathcal{G}_1/\mathcal{C}^\perp; \tag{3.3.2}$$

$$\mathcal{C}^\perp = \mathcal{B} + \mathcal{C}^\perp/\mathcal{B}; \tag{3.3.3}$$

$$\mathcal{G}_1/\mathcal{C}^\perp \cong (\mathcal{G}_1/\mathcal{B})/(\mathcal{C}^\perp/\mathcal{B}). \tag{3.3.4}$$

如果将 $e \in \mathcal{G}_1$ 的 2- 上边缘 $\delta_1 e$ 定义为它在 F 中的关联迂之和，则可以将 δ_1 从 $\mathcal{G}_1$ 的一个基上线性延拓到全空间 $\mathcal{G}_1$, 即 $\delta_1 : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ 为

$$\forall A \in \mathcal{G}_1,\ \delta_1 A = \sum_{e\in A} \delta_1 e. \tag{3.3.5}$$

这时，称 δ_1 为 G 的 1-上边缘映象. 且，容易看出 $\delta_1 \in \text{Hom}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$. $\mathcal{G}_1$ 的子空间 Ker δ_1 被称为 G 的 1-上循环空间, 和子空间 Im δ_1 为 2-上边缘空间.

引理 3.3.2 $\delta_1\delta_0 = 0$.

证 事实上，只要注意到如下的形式

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{G}_0(\Sigma, GF(2)) & \xrightarrow{\delta_0} & \mathcal{G}_1(\Sigma, GF(2)) & \xrightarrow{\delta_1} & \mathcal{G}_2(\Sigma, GF(2)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{G}_2(\Sigma^*, GF(2)) & \xrightarrow{\partial_2^*} & \mathcal{G}_1(\Sigma^*, GF(2)) & \xrightarrow{\partial_1^*} & \mathcal{G}_0(\Sigma^*, GF(2))
\end{array} \tag{3.3.6}$$

是可交换的. 其中，$\Sigma^* = \Sigma(G^*; F^*)$ 是 $\Sigma = \Sigma(G; F)$ 的对偶和 τ 为确定这个对偶性的映象. 由引理 3.2.6 可知 $\partial_1^*\partial_2^* = 0$. 从而，由对偶性即得引理. ♮

这个引理告诉我们 Im $\delta_0 \subseteq$ Ker δ_1, 即 G 的 1- 上边缘空间是它的 1- 上循环空间的子空间. 一般而言， G 的 1- 上循环空间未必是上循环空间 $\mathcal{C}^\perp$, 或者说 1- 上边缘空间.

引理 3.3.3 Im $\delta_0 =$ Ker δ_1 当且仅当 $\Sigma = \Sigma(G, F)$ 是平面的.

证 根据由 (3.3.6) 所示的形式，有 Im $\delta_0 \cong$ Im ∂_2^* 和 Ker $\delta_1 \cong$ Ker ∂_1^*. 由定理 3.2.5 之对偶形式，即得引理. ♮

令 $\widetilde{\mathcal{H}_1}(\Sigma; GF(2))$ =Ker δ_1/ Im δ_0, 或简记为 $\widetilde{\mathcal{H}_1}$ 只要 G 没有特别的说明. 我们称 $\widetilde{\mathcal{H}_1}$ 为 G 的一个 1-上同调空间.

定理 3.3.2 图 $G = (V, E)$ 是平面的，当且仅当存在迂的集合 F 使得 $\widetilde{\mathcal{H}_1} = 0$.

证 引理 3.3.3 的一个直接结果. ♮

至此，也许有人想看一看图 G 连同迂的集合 F 的 0- 上同调空间和 2- 上同调空间是什么样子而分别引进 (−1)- 上边缘映象和 2- 上边缘映象. 因为与 §3.2 中之讨论相仿且没什么困难也就留给读者了.

下面，我们讨论循环空间 $\mathcal{C}$ 和上循环空间 $\mathcal{C}^{\perp}$ 的结构性质. 设 T 为图 G 上的树， T^* 为与之相应的上树. 令 $C^*(e), e \in T$, 为基本上圈和 $C(e), e \in T^*$, 为基本圈. 若我们定义

$$f(e) = \begin{cases} C^*(e), \text{ 当 } e \in T, \text{ 即}, (e,T) = 1; \\ \sum\limits_{a \in C(e)+e} C^*(a), \text{ 否则}. \end{cases} \tag{3.3.7}$$

则，可将它线性延拓为函数 $f : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{C}^{\perp}$. 自然， $f \in \text{Hom}\,(\mathcal{G}_1, \mathcal{C}^{\perp})$. 如果将 f 限定在 $\mathcal{G}_1$ 的子空间 2^T 上，则 $f_T \in \text{Hom}\,(2^T, \mathcal{C}^{\perp})$. 不管怎样，我们可以证明 $\text{Ker } f_T = 0$. 由定理 1.4.2 (第一同构定律), $2^T \cong \text{Im } f_T$.

定理 3.3.3 $2^T \cong \mathcal{C}^{\perp}$.

证 由于如上所述 $\{f_T(e) | \forall e \in T, (e,T) = 1\}$ 形成 $\mathcal{C}^{\perp}$ 的一组基，有 $\text{Im } f_T = \mathcal{C}^{\perp}$. 这就得到了定理. ♮

相仿地，我们定义

$$h(e) = \begin{cases} C(e), \text{ 当 } e \in T^*, \text{ 即}, (e,T^*) = 1; \\ \sum\limits_{a \in C^*(e)+e} C(a), \text{ 否则}. \end{cases} \tag{3.3.8}$$

并且，将它延拓为一个同态 $h \in \text{Hom}\,(\mathcal{G}_1, \mathcal{C})$. 则， h 限定在 T^* 上的函数 $h_{T^*} \in \text{Hom}\,(2^{T^*}, \mathcal{C})$. 易证 $\text{Ker } h_{T^*} = 0$. 从而，由定理 1.4.2, $2^{T^*} \cong \text{Im } h_{T^*}$. 由与 $\mathcal{C}^{\perp}$ 情形相仿的理由，可知 $\text{Im } h_{T^*} = \mathcal{C}$. 从而， h_{T^*} 是 2^{T^*} 和 $\mathcal{C}$ 之间的一个同构.

定理 3.3.4 $A \in \mathcal{C}^{\perp} \Leftrightarrow \sum_{e \in A} h(e) = 0$.

证 首先，我们证明对于基本圈 $C^*(e), e\in T$, 定理成立. 因为

$$\sum_{a\in C^*(e)} h(a) = \sum_{a\in C^*(e)+e} C(a) + \sum_{a\in C^*(e)+e} C(a) = 0,$$

从表达式之唯一性即得欲证. 然后，证明一般情形. 由于任何上循环可以唯一地表示为基本上圈之和如 (3.3.1) 所示，从 h 的线性即可得定理. ♮

对偶地，我们可得

$$A\in \mathcal{C} \Leftrightarrow \sum_{e\in A} f(e) = 0. \tag{3.3.9}$$

如果一个图没有双循环，我们即将讨论存在此性质之条件，由定理 3.1.4 可知，任何 $A\in \mathcal{G}_1$ 可以唯一地表示为

$$A = \gamma(A) + \omega(A), \tag{3.3.10}$$

其中 $\gamma(A)\in \mathcal{C}$ 和 $\omega(A)\in \mathcal{C}^{\perp}$. 特别地，任何 $e\in E$ 有如下的形式

$$e = \gamma(e) + \omega(e), \tag{3.3.11}$$

其中 $\gamma(e)\in \mathcal{C}$ 和 $\omega(e)\in \mathcal{C}^{\perp}$ 分别称为主循环和主上循环. 由唯一性，有，

$$\gamma(A) = \sum_{e\in A}\gamma(e);\ \omega(A) = \sum_{e\in A}\omega(e). \tag{3.3.12}$$

事实上，由 (3.3.12), $\gamma\in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_1, \mathcal{C})$ 和 $\omega \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_1, \mathcal{C}^{\perp})$. 容易看出， $\mathrm{Im}\ \gamma = \mathcal{C}$, $\mathrm{Ker}\ \gamma = \mathcal{C}^{\perp}$, $\mathrm{Im}\ \omega = \mathcal{C}^{\perp}$ 和 $\mathrm{Ker}\ \omega = \mathcal{C}$ 以及 $\gamma^2 = \gamma$ 和 $\omega^2 = \omega$.

定理 3.3.5 若 $B=0$, 则

$$A\in\mathcal{C}^{\perp}\Leftrightarrow\sum_{e\in A}\gamma(e)=0;\qquad(3.3.13)$$

$$A\in\mathcal{C}\Leftrightarrow\sum_{e\in A}\omega(e)=0.\qquad(3.3.14)$$

证 由 (3.3.10), $A\in\mathcal{C}^{\perp}\Leftrightarrow\gamma(A)=0$ 和 $A\in\mathcal{C}\Leftrightarrow\omega(A)=0$. 即得定理. ♮

进而，对于无双循环的图，我们可以分别由主循环和主上循环确定 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^{\perp}$ 的一组基.

定理 3.3.6 若 G 没有双循环，则对于 G 上的树 T 和它相应的上树 T^*, 主循环的集合 $\{\gamma(e)|\forall e\in T^*\}$ 形成 $\mathcal{C}$ 上的一组基和对偶地，主上循环的集合 $\{\omega(e)|\ \forall e\in T\}$ 形成 $\mathcal{C}^{\perp}$ 上的一组基.

证 由对偶性，只需证明两个说法之一. 我们取后者. 由于 $\mathrm{Im}\,\omega=\mathcal{C}^{\perp}$, $\{\omega(e)|\forall e\in E\}$ 生成 $\mathcal{C}^{\perp}$. 设 $C(a)$ 为由 $a\in T^*$ 所产生的基本圈. 由 $\mathrm{Ker}\,\omega=\mathcal{C}$, $\omega(C(a))=0$. 因为 $C(a)=a+T\cap C(a)$, 有

$$\omega(a)=\sum_{e\in T\cap C(a)}\omega(e).$$

从而， $\{\omega(e)|\forall e\in T\}$ 也产生 $\mathcal{C}^{\perp}$. 由 $|\{\omega(e)|\forall e\in T\}|=\nu-1$, 即 $\mathcal{C}^{\perp}$ 的维数. 定理得证. ♮

定理 3.3.7 对于一个无双循环的图 $G=(V,E)$ 有

$$\forall e\in E,\ f(e)=\omega(T\cap f^2(e)).\qquad(3.3.15)$$

证 由于对任何 $A\in\mathcal{C}^{\perp}$, 从 f 的定义可知 $A=f(T\cap A)$. 由 $f^2(e)\in\mathcal{C}^{\perp}$, 有 $f^2(e)=f(T\cap f^2(e))$. 不管怎样，这意味

$f(e)$ 和 $T \cap f^2(e)$ 在 f 之下有相同的象. 因为 Ker $f = \mathcal{C}$, 有 $T \cap f^2(e) = C + f(e)$, 其中 $C \in \mathcal{C}$. 况且， $f(e) \in \mathcal{C}^{\perp}$. 由 (3.3.10) 的分解形式可得 $f(e) = \omega(T \cap f^2(e))$. 这就得到了定理. ♮

对偶地，我们也可以对于无双循环的图 $G = (V, E)$ 得到: $\forall e \in E$,

$$h(e) = \gamma(T^* \cap h^2(e)). \tag{3.3.16}$$

进而，容易论证 $\{T \cap f^2(e) | \forall e \in T\}$ 与 $\{T^* \cap h^2(e) | \forall e \in T^*\}$ 的并形成 $\mathcal{G}_1$ 的一组基.

§3.4 双循环空间

如果一个图 $G = (V, E)$ 有一个非空的双循环空间，或者说 $\mathcal{G}_1$ 有一个非零向量是双循环，则由定理 3.1.4, 因为这个双循环上的任一边不与 $\mathcal{B}$ 正交，均不能将它表示为主循环和主上循环之和. 但，任何不属于任一双循环的边都有这样的表示，或者说分解:

$$e = \gamma(e) + \omega(e). \tag{3.4.1}$$

又，由于对任何 $B \in \mathcal{B}$, $\gamma(e) + B$ 和 $\omega(e) + B$ 也分别是主循环和主上循环，则有

$$e = (\gamma(e) + B) + (\omega(e) + B). \tag{3.4.2}$$

就是说，这种分解不是唯一的. 令 $O = \{e | \exists B \in \mathcal{B}, e \in B\}$. 可以论证 (3.4.2) 形式之分解对于 $\gamma(e) \backslash O$ 和 $\omega(e) \backslash O$ 是唯一的. 从而，我们有边集 E 的三元分解:

$$E = M + N + O. \tag{3.4.3}$$

其中，

$$\begin{cases} M=\{e|\ \exists\gamma\in\mathcal{C},(e\in\gamma)\wedge(e+\gamma\in\mathcal{C}^{\perp})\}; \\ N=\{e|\ \exists\omega\in\mathcal{C}^{\perp},(e\in\omega)\wedge(e+\omega\in\mathcal{C})\}. \end{cases}$$

定理 3.4.1 $\forall e\in E,\forall B\in\mathcal{B}$,

(i) $e\in M\Rightarrow(|\gamma(e)+B|=1(\bmod 2))$
$\wedge(|\omega(e)+B|=0(\bmod 2))$;

(ii) $e\in N\Rightarrow(|\gamma(e)+B|=0(\bmod 2))$
$\wedge(|\omega(e)+B|=1(\bmod 2))$;

(iii) $|B|=0(\bmod 2)$.

证 首先证明 (iii). 因为 $\forall B\in\mathcal{B}$, $(B,B)=0$, $|B|=0(\bmod 2)$. 这就得到了三 (iii). 然后，证 (ii) 和 (i). 由 (iii) 和 (3.4.2), 有 $|\gamma(e)|+1=|\omega(e)|(\bmod 2)$. 若 $e\in M$, 则 $e\in\gamma(e)$. 由于 $\gamma(e)+e\in\mathcal{C}^{\perp}$, 有 $(\gamma(e),\gamma(e)+e)=0$, 即 $|\gamma(e)|+1=0\ (\bmod 2)$. 从而，$|\gamma(e)|=1(\bmod 2)$. 由 (iii) 即得 (i). 相仿地可知 (ii) 也成立. ♮

这个定理使我们能够用来简化确定 E 的三元分解的手续. 一般而言，根据 (3.4.2) 用如下的原则总可求得 E 的一个三元分解. 对 $e\in E$, 令

$$\begin{cases} \mathcal{C}(e) = \{C|\ \forall C\in\mathcal{C},(C,e)=0\}; \\ \mathcal{C}[e] = \{C|\ \forall C\in\mathcal{C},(C,e)=1\}. \end{cases} \tag{3.4.4}$$

相仿地可知 $\mathcal{C}^{\perp}(e)$ 和 $\mathcal{C}^{\perp}[e]$ 的涵义. 当然, 下面的 $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ 和 $\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\perp})$ 分别表示 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^{\perp}$ 中的交错空间.

Prin.1 $\forall e \in E$,

$$e \in M \Leftarrow \exists A \in \mathcal{C} \backslash \mathcal{A}(\mathcal{C}),\quad (e \in A) \wedge (A \perp \mathcal{C}(e)) \wedge (\forall B \in \mathcal{C}[e], (A, B) = 1).$$

Prin. 2 $\forall e \in E$,

$$e \in N \Leftarrow \exists A \in \mathcal{C}^{\perp} \backslash \mathcal{A}(\mathcal{C}^{\perp}),\quad (e \in A) \wedge (A \perp \mathcal{C}^{\perp}(e)) \wedge (\forall B \in \mathcal{C}^{\perp}[e], (A, B) = 1).$$

Prin. 3 $\forall e \in E$,

$$e \in O \Leftarrow \exists A \in \mathcal{A}(\mathcal{C}),\ (e \in A) \wedge (A \perp \mathcal{C}).$$

引理 3.4.1. 令 $a, b \in M + N$. 则,

$$a \in \gamma(b) \Leftrightarrow b \in \gamma(a);\ a \in \omega(b) \Leftrightarrow b \in \omega(a).$$

证 由于 $(\gamma(a), \gamma(b)) = (a + \omega(a), \gamma(b))$, 也有 $(\gamma(a), \gamma(b)) = (\gamma(a), b + \omega(b))$, 由正交性有 $(a, \gamma(b)) = (\gamma(a), b)$. 因此, 前一说法成立. 相仿地可得后一说法. ♮

由定理 3.1.4, 对于 $A \in \mathcal{B}^{\perp}$, 我们还有如下之分解形式:

$$A = \gamma(A) + \omega(A), \tag{3.4.5}$$

其中 $\gamma(A) \in \mathcal{C}$ 和 $\omega(A) \in \mathcal{C}^{\perp}$ 同样分别称为 A 的主循环和主上循环. 当然, 对于 $A \cap O = \emptyset$, 由 (3.4.1) 有

$$\gamma(A) = \sum_{e \in A} \gamma(e),\ \omega(A) = \sum_{e \in A} \omega(e).$$

定理 3.4.2 $\forall A, B \in \mathcal{B}^{\perp}$,

$$(\gamma(A), B) = (A, \gamma(B));\ (\omega(A), B) = (A, \omega(B)).$$

证 与引理 3.4.1 的证明相仿地，由空间的线性性即可得定理. ♮

进而，我们可以得到对于 $A \subset E$ 确定其主循环和主上循环的判准. 令

$$\begin{cases} \mathcal{C}\langle A\rangle = \{C \mid \forall C \in \mathcal{C}, A \perp C\}; \\ \mathcal{C}[A] = \{C \mid \forall C \in \mathcal{C}, (A, C) = 1\}. \end{cases} \tag{3.4.6}$$

相仿地，由 $\mathcal{C}^{\perp}$ 代 $\mathcal{C}$ 即可从 (3.4.6) 得到 $\mathcal{C}^{\perp}\langle A\rangle$ 和 $\mathcal{C}^{\perp}[A]$.

Crit.1 $\forall A \subset E, C \in \mathcal{C}$,

$$C = \gamma(A) \Leftrightarrow (C \perp \mathcal{C}\langle A\rangle) \wedge (\forall D \in \mathcal{C}[A], (C, D) = 1).$$

Crit.2 $\forall A \subset E, C \in \mathcal{C}^{\perp}$,

$$C = \omega(A) \Leftrightarrow (C \perp \mathcal{C}^{\perp}\langle A\rangle) \wedge (\forall D \in \mathcal{C}^{\perp}[A], (C, D) = 1).$$

若对于 $a, b \in M+N, a \neq b$, 有 $(a, \gamma(b)) = 1$ (同样地, $(a, \omega(b)) = (\gamma(a), b) = (\omega(a), b) = 1$), 则称 a 和 b 是交叉的, 用 “a int b” 或 “b int a” 表示. 进而，令

$$\text{Int } a = \{b \mid \forall b \in E,\ b \text{ int } a\}. \tag{3.4.7}$$

容易看出， $a \in M + N$, 有

$$\text{Int } a = \gamma(a) \cap \omega(a) \cap (M + N). \tag{3.4.8}$$

定理 3.4.3 若 $B=0$, 则对任何 $e\in E$, 有

$$|\text{Int } e| = 0(\bmod 2). \tag{3.4.9}$$

证 因为这时 $M+N=E$, 公式 (3.4.8) 变为 $\text{Int } e=\gamma(e)\cap\omega(e)$. 由正交性知 $|\text{Int } e|=(\gamma(e),\omega(e))=0(\bmod 2)$. 即得定理.

♮

令 $G\bullet e$ 和 $G:e$ 分别为在 $G=(V,E)$ 上收缩边 $e\in E$ 成为一个节点和通过引进一个新节点将 e 双分为二条边所得到的图.

引理 3.4.2 设 G 的双循环空间为 r 维的. 如果 $e\in O$, 则 $G-e, G\bullet e$ 和 $G:e$ 的双循环空间是相同的. 且, 其维数为 $r-1$. 如果 $e\in M$, 则 $G-e, G\bullet e$ 和 $G:e$ 的双循环空间的维数分别为 $r, r+1$ (当然, e 不是环) 和 $r+1$. 如果 $e\in N$, 则 $G-e$, $G\bullet e$ 和 $G:e$ 的双循环空间的维数分别为 $r+1$ (当 e 不为割边时), r 和 r.

证 当 $e\in O$ 时, 可以看出在 G 中含 e 的所有双循环均不产生 $G-e$,$G\bullet e$ 和 $G:e$ 中的双循环. 从而, 第一个说法成立. 其它二个说法可由分解公式 (3.4.2) 所导出. ♮

定理 3.4.4 对于任何非平凡的图 G (当然, 是连通的), $B=0$ 当且仅当 $\tau(G)=1(\bmod 2)$. 其中, $\tau(G)$ 为 G 上树的数目, 即复杂度.

证 对 G 的度用归纳法. 当 G 为树时, 或为任意图但边数不多, 易验证定理成立. 由于收缩一条割边不会改变图的复杂度和双循环的数目, 我们可假定在 G 中无割边. 又, 如 § 1.3 中所定义的, G 不带环. 故, 对任何 $e\in E$, 图 $G-e$

和 $G \bullet e$ 皆连通. 而且, 总有 $\tau(G) = \tau(G-e) + T(G \bullet e)$, 其中 $\tau(G-e)$ 和 $\tau(G \bullet e)$ 分别为 G 中不含 e 和含 e 的树的数目. 对于 $e \in O$, 因为 $G-e$ 和 $G \bullet e$ 的双循环空间具有相同的维数 (引理 3.4.2), 由归纳假设可知 $\tau(G-e) = \tau(G \bullet e)$. 从而, $\tau(G) = \tau(G \bullet e) + \tau(G-e) = 0(\bmod 2)$. 这样, 只需讨论二种可能的情形. (1) 若 $e \in M$, 则 $G \bullet e$ 必有一个双循环 (引理 3.4.2). 从而, 由归纳假设有 $\tau(G \bullet e) = 0(\bmod 2)$. 而且, 由引理 3.4.2 可知 $G-e$ 的双循环空间与 G 的相同和 $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G \bullet e) = \tau(G-e)(\bmod 2)$. (2) 若 $e \in N$, 则 $G \bullet e$ 的双循环空间与 G 的相同 (引理 3.4.2) 和与 (1) 相仿地可得 $\tau(G) = \tau(G \bullet e)(\bmod 2)$. 从而, 由归纳假设, 即可导出定理成立. ♮

对于双循环空间 $\mathcal{B}$, 它的一个*双树*, 用 R^0 表示, 即指它的一个极小联集, 或者说 E 的一个子集使得它的任何一个真子集均非 $\mathcal{B}$ 的联集. 与循环空间和上循环空间相仿地, 双树确定双循环空间 $\mathcal{B}$ 的一组基, 也称为 $\mathcal{B}$ 的*基本基*

设 $A \subseteq E$. 同样地, 记 $G-A, G \bullet A$ 和 $G : A$ 分别为从 $G=(V,E)$ 中去掉 A 中的边, 收缩 A 的每一条边为一个节点和将 A 的每一条边作双分而得到的图.

定理 3.4.5 若 R^0 是一个双树, 则 $G-R^0, G \bullet R^0$ 和 $G : R^0$ 皆无双循环.

证 由于双树确定 G 的双循环空间的一组基, 从引理 3.4.2 即导致此定理. ♮

一般而论, 似乎尚未发现一种简单易行的图论方法确定出一个图的双树. 然, 对于可平面图, 确甚为简单. 关键的步骤在于按一定方式求出一个迂的集合使得形成一个多面形.

通穿规则　在一个可平面图的平面嵌入上，从一个节点起步在一面 f 内沿一条与此节点关联的边只要达到边之中点就穿过此边在与此边关联的另一面沿此边继续走.

假设 TTr 是依通穿规则使得每一条边恰通过二次所得的迂的集合. 对于 $t \in TTr$, 令 $q(t)$ 为在 t 中仅出现一次的边的集合. 因为 TTr 是一个多面形，$\partial_2 t = q(t)$.

引理 3.4.3　$\forall t \in TT_r$,

$$(q(t) \in B) \wedge (q(t) = 0 \Leftrightarrow |TT_r| = 1.)$$

证　因为 $q(t) = \partial_2 t \in C$ 和由平面对偶性对 $f \in F$ 有 $\langle q(t), \partial_2 f\rangle = 0$, 则 $q(t) \in C^{\perp}$. 从而，$q(t) \in B$ 由 TT_r 的条件，后一说法之充分性显然. 而必要性则根据图的连通性可由通穿规则本身而得到. ▮

引理 3.4.4　令 $TTr = \{t_1, t_2, \cdots, t_r\}$. 则，$r$ 个向量 $q(t_i), i = 1, \cdots, r$, 是线性相关的但它们之中任何 $r-1$ 个向量皆线性无关.

证　由于 $\sum_{1<i\le r} q(t_i) = 0$. 第一个说法是显然的. 若第二个说法不真, 如果必要通过适当排序可以假设 $q(t_1) = \sum_{2\le i\le r-1} q(t_i)$. 然而，由第一个说法有 $\sum_{2\le i\le r} q(t_i) = 0$. 这就意味 $TTr = \{t_2, t_3, \cdots, t_r\}$. 与引理的条件矛盾. ▮

定理 3.4.6　$\dim B = |TTr| - 1$.

证　由引理 3.4.3–4 和前面关于循环和上循环空间的讨论，可以确定 E 的一个子集，用 $\{e_1, \cdots, e_{r-1}\}$ 表示，使得满足性质：$\langle q(t_i), e_i\rangle = 1$, $\langle q(t_j), e_i\rangle = 0$, $j \ne i$, $1 \le i, j \le r-1$.

就是说， $R^0 = \{e_1, \cdots, e_{r-1}\}$ 为由 $\{q(t_i)|i = 1, 2, \cdots, r\}$ 所生成的空间的一个极小联集. 进而，证明 R_0 是一个双树. 对 r 用归纳法. 若 $r = 1$, 则 $R^0 = \emptyset$. 由引理 3.4.3, 结论为真. 若 $r > 1$, 不失一般性可令 e_1 同在 $q(t_1)$ 和 $q(t_r)$ 中出现，则 $TTr(G - e_1) = \{t_2, \cdots, t_{r-1}, t_r'\}$, 其中 t_r' 为由 $q(t_1)$ 和 $q(t_r)$ 所合成的. 由归纳假设， $R^0 \setminus \{e_1\}$ 为 $G - e_1$ 的一个双树. 由于 $e_1 \in O$, 从引理 3.4.2 即得 R^0 为 G 的一个双树. 从而，$\dim B = |R^0| = r - 1 = |TTr| - 1$. ♮

§3.5 注记

3.5.1 讨论空间，主要是循环和上循环空间的大多数文章是对于图的边定向在实数域上进行. 然，所得之结果事实上并不依赖定向的方式. 最早的文章当首推 Kirchhoff 分析电网络的. 这一理论的主要方面在陈氏的书中可以查到 [Che1]. 尤其是 Brooks, Smith, Stone 和 Tutte 在解决拼方问题时所用的方法与网络理论紧密相关 [BSST 1]. 另一方面，图上的链群的理论多少是受拓扑学的代数化之影响. 这方面的第一篇文章似乎归于 Tutte [Tut4]. 不管怎样，吴文俊那时在拓扑学方面之工作也含有对图作为特殊情形的讨论 [Wu1]. 此后，还有 [Liu22].

3.5.2 双循环空间在陈氏的文章 [Che2] 中讨论一个图上的二分空间时而被引进的. 之后，一些作者，特别是在 [Ro1] 中作了进一步的研究. 近来， Berman 讨论了整数环 Z 上的双循环, 发现了一个图的复杂度的唯一分解 $\tau = t_1 \cdots t_m = \prod_{1 \le i \le m} t_i$ 使得 Z 上的双循环群同构于 $Z(t_1) \times \cdots \times Z(t_m)$. 其中， $Z(t_i) = \{a \in Z \mid t_i a = 0\}, i = 1, \cdots, m$[Berk2].

3.5.3 在 §3.4 中，为求一个平面图的双循环空间之基提

供了一种十分简单的方法. 然而, 这种方法似乎不能直接发展到一般的图. 此法之原始想法可在 [Sh1] 中看到. 更早地, 可见 [De1].

3.5.4 虽然在 § 3.3 中提供了一些关于图的平面性的判准. 而这些判准不大会对设计有效算法有直接的好处. 在第五章中, 我们将进一步地讨论以便得到更为有效的定理.

第四章

可平面图

§4.1 Euler 公式的利用

设 Σ 是一个多面形. 它的基准图为 $G=(V,E)$. F 是面的集合. 令 $\rho(v)$ 和 $\rho^*(f)$ 分别为节点 $v\in V$ 和面 $f\in F$ 的次. 则, 有

$$\begin{cases} V=\sum\limits_{i\geq 1} V_i,\ V_i=\{v|\ \forall v\in V,\ \rho(v)=i\}; \\ F=\sum\limits_{i\geq 1} F_i,\ F_i=\{f|\ \forall f\in F,\ \rho^*(f)=i\}. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

进而, 令 $\nu_i=|V_i|$, $1\leq i\leq \nu$, $\varphi_i=|F_i|, 1\leq i\leq\varphi$, 则

$$\begin{cases} \nu=|V|=\sum\limits_{i\geq 1}\nu_i; \\ \varphi=|F|=\sum\limits_{i\geq 1}\varphi_i; \\ 2\epsilon=\sum\limits_{i\geq 1} i\nu_i=\sum\limits_{i\geq 1} i\varphi_i. \end{cases} \tag{4.1.2}$$

在对偶的情形下, G 的对偶图 $G^*=(V^*,E^*)$, F^* 为它的面的集合, 就是 Σ 的对偶多面形 Σ^* 的基准图. 对于 V^* 和 F^*, 也

有与 (4.1.1) 和 (4.1.2) 相仿的公式．而且，有如下关系：

$$\begin{cases} \nu^* = |V^*| = |F| = \varphi,\ \nu_i^* = \varphi_i,\ i \geq 1; \\ \varphi^* = |F^*| = |V| = \nu,\ \varphi_i^* = \nu_i,\ i \geq 1. \end{cases} \tag{4.1.3}$$

引理 4.1.1 令 $\delta(G)$ 和 $\delta^*(G) = \delta(G^*)$ 分别为 G 和 G^* 的节点的最小次．如果 $\delta(G), \delta^*(G) \geq 3$, 则有

$$\left\lceil \frac{3\max(\nu,\varphi)}{2} \right\rceil \leq \epsilon \leq 3(\min(\nu,\epsilon) - \chi(\Sigma)). \tag{4.1.4}$$

而且，其中之等号成立当且仅当 $V_i = \emptyset$, $i \geq 4$, 或者 $F_i = \emptyset$, $i \geq 4$.

证 由 (4.1.2) 中的第三式，有

$$2\epsilon \geq \max\left(3\sum_{i\geq 1}\nu_i,\ 3\sum_{i\geq 1}\varphi_i\right). \tag{4.1.5}$$

从而，有 (4.1.4) 的左边的不等式．由 (1.5.6) 中的 Euler 示性数和 (4.1.5), 有

$$\begin{aligned} 3\chi(\Sigma) &\leq \min(-\epsilon + 3\nu, -\epsilon + 3\varphi) \\ &= -\epsilon + 3\min(\nu,\varphi). \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

这就得 $\epsilon \leq 3\min(\nu,\varphi) - 3\chi(\Sigma)$. 从而， (4.1.5) 的右边的不等式成立．

因为 (4.1.5), 或 (4.1.6) 等式成立当且仅当 $|V_i| = 0, i \geq 4$, 或 $|F_i| = 0, i \geq 4$, 即引理的最后一个说法． ♮

由这个引理，可以直接导出一批已知的结果 [Liu20-21]. 若 $\Sigma \subset P_p$, 则由 (1.5.7) 有

$$\left\lceil \frac{3\max(\nu,\varphi)}{2} \right\rceil \leq \epsilon \leq 3(\min(\nu,\varphi) - 2 + 2p). \tag{4.1.7}$$

当然，对 $p=0$, 即球面或平面，有，

$$\left\lceil\frac{3\max(\nu,\varphi)}{2}\right\rceil\le\epsilon\le 3\min(\nu,\varphi)-6. \tag{4.1.8}$$

若多面形 Σ 的所有面皆三角形，则称之为 *三角剖分*. 球面上的一个三角剖分也称为 *极大平面图*. 对于极大平面图，(4.1.8) 中之等式成立.

若 $\Sigma\subset Q_q$, 则

$$\left\lceil\frac{3\max(\nu,\varphi)}{2}\right\rceil\le\epsilon\le 3(\min(\nu,\epsilon)-1+q). \tag{4.1.9}$$

在多面形 Σ 上，若所有节点全是 k- 次的，则称它为 *k-正则的*. 相仿地，若它的所有面皆 k- 次的，则称它为 *k^*-正则的*. 一个 3- 正则多面形也称为 *立方的*. 当然，三角剖分是 3^*- 正则的. 若一个多面形既 s- 正则又 t^*- 正则，则称之为 *全正则的*, 或者 *(s,t)-正则的*. 即，*(s,t)- 多面形*.

令 $\bar\rho$ 和 $\bar\rho^*$ 分别为多面形的节点和面的平均次. 则，我们有

$$\bar\rho=\frac{1}{\nu}\sum_{i\ge1}i\nu_i;\ \ \bar\rho^*=\frac{1}{\varphi}\sum_{i\ge1}i\varphi_i. \tag{4.1.10}$$

引理 4.1.2 对于一个多面形 Σ 它的基准图为 $G=(V,E)$ 且 $\delta(G),\delta^*(G)\ge3$. 则，有

$$\frac{2}{\bar\rho}-1+\frac{2}{\bar\rho^*}\begin{cases}>0, & \text{当 } \Sigma\subset P_0 \text{ 或 } Q_1;\\ =0, & \text{当 } \Sigma\subset P_1 \text{ 或 } Q_2;\\ <0, & \text{其它}.\end{cases} \tag{4.1.11}$$

证 由 (4.1.10), 有 $\nu\bar{\rho} = 2\epsilon = \varphi\bar{\rho}^*$. 由 (1.5.6), 得

$$\begin{aligned}\chi(\Sigma) &= \frac{2\epsilon}{\bar{\rho}} - \epsilon + \frac{2\epsilon}{\bar{\rho}^*} \\ &= \epsilon\Big(\frac{2}{\bar{\rho}} - 1 + \frac{2}{\bar{\rho}^*}\Big).\end{aligned}$$

进而, 由 (1.5.7) 即得 (4.1.11). ▮

根据引理 4.1.2, 可能的 (s,t)- 多面形为当

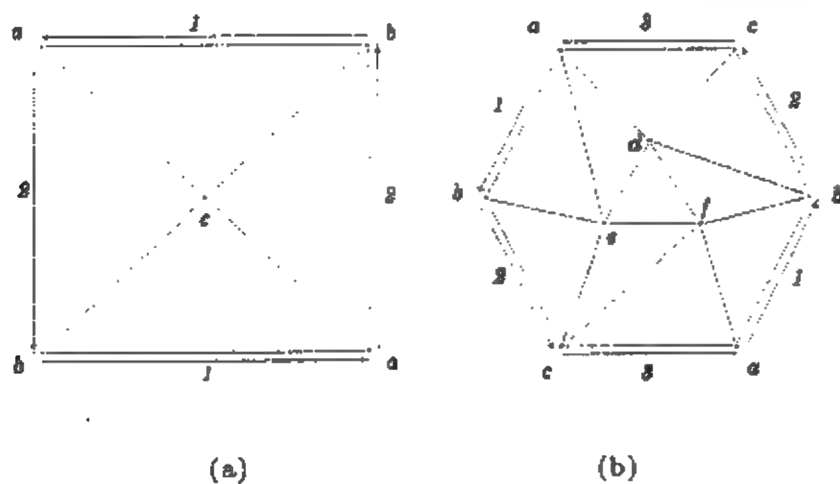
$$(s,t) = (\bar{\rho}, \bar{\rho}^*) = (3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3)$$

时的情形.

定理 4.1.1 在球面上有五种 (s,t)- 多面形. 在射影平面上有四种 (s,t)- 多面形.

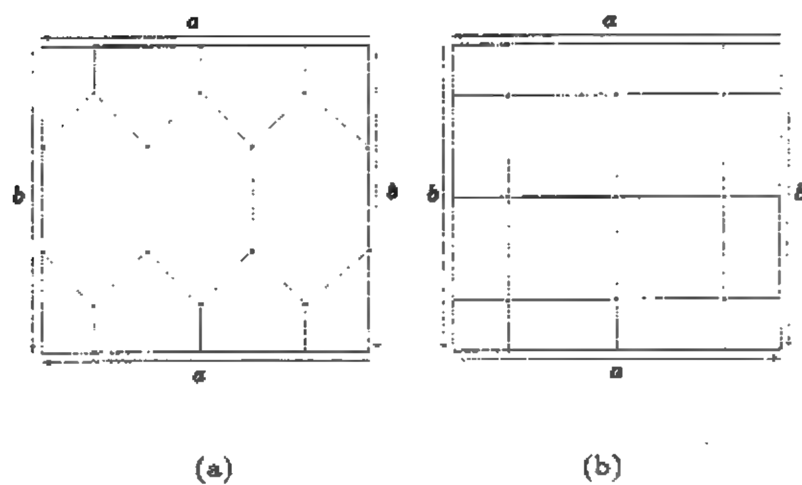
证 事实上, 第一个结论中的五种多面形即 *Polato*多面体: 正四面体 (即 (3.3)– 多面形 Π_4), 立方体 (或正六面体, 即 (3,4)– 多面形 Π_6), 正八面体 (即 (4,3)– 多面形 Π_8), 正十二面体 (即 (3,5)– 多面形 Π_{12}) 和正廿面体 (即 (5,3)– 多面形 Π_{20}). 由上面的讨论, 第一个结论得以证明. 第二个结论中的四个多面形如图 4.1.1 所示. 它们是 (4,3)– 多面形及其对偶 (3,4)– 多面形 (如 (a) 中所示), 和 (5,3)– 多面形及其对偶 (3,5)– 多面形 (如 (b) 中所示). 然而, (3,3)– 多面形在射影平面上不存在 (留给读者证明). 从而, 第二个结论得证. ▮

相仿地, 由 (4.1.11), 在环面上或 Klein 瓶上, 有三种可能的 (s,t)– 多面形, 即 $(s,t) = (\bar{\rho}, \bar{\rho}^*) = (3,6), (4,4), (6,3)$. 事实上, 图 4.1.2 中的 (a) 和 (b) 分别为环面上的 (3,6)– 和 (4,4)– 多面形. 而, (6,3)– 多面形则是 (3,6)– 多面形的对偶. 在图 4.1.3 中给出了相应的 (s,t)– 多面形在 Klein 瓶上的情形.



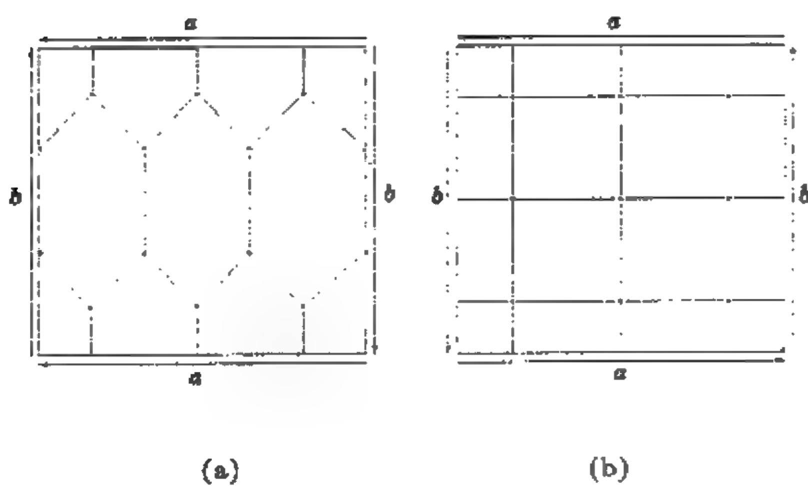
(a) (b)

图 4.1.1



(a) (b)

图 4.1.2



(a) (b)

图 4.1.3

引理 4.1.3 对于曲面 S 上的 k- 多面形，$k \geq 3$, 有

$$\sum_{j\geq 3}(2k-(k-2)j)\varphi_j = 2k\chi(S). \tag{4.1.12}$$

证 由 (4.1.2), 有

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 3}(2k-(k-2)j)\varphi_j &= 2\sum_{j\geq 3}j\varphi_j - k\sum_{j\geq 3}j\varphi_j + 2k\sum_{j\geq 3}\varphi_j\\ &= 2k\sum_{j\geq 3}\nu_j - 2k\epsilon + 2k\varphi\\ &= 2k\chi(S).\end{aligned}$$

令 m_i^t 为与 i 个次为 t 的面关联的节点的数目和 λ^t 为节点 v 与次为 t 的面 f 关联的对 $\{v,f\}$ 之数目. 则，有

$$\begin{cases} t\varphi_t = \lambda^t = \sum\limits_{i=1}^{k} im_i^t;\\ \nu = \sum\limits_{i=0}^{k} m_i^t, \ t\geq 3;\\ t\varphi_t \leq l\nu + \sum\limits_{j=1}^{k-l} jm_{l+j}^t, \ 3\leq t\leq k. \end{cases} \tag{4.1.13}$$

在上面的不等式中，等号成立当且仅当 $m_0^t = m_1^t = \cdots = m_{l-1}^t = 0$. 进而，令

$$\begin{aligned}\Phi(S;\varphi_3,\varphi_4,\cdots) &= \frac{2(k-l)\chi(S)}{2k-(k-2)t}\\ &\quad + \sum_{\substack{j\geq 3\\ j\neq t}}\frac{((k-2)t-2l)j-2(k-l)t}{2k-(k-2)t}\varphi_j. \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

定理 4.1.2 (第一不等式) 对于曲面 S 上的 k- 多面形，有

$$\sum_{s=1}^{k-l} s m_{l+s}^{t} \geq \Phi(S;\varphi_3,\varphi_4,\cdots). \tag{4.1.15}$$

其中， $t\geq 3, t\neq 2k/(k-2)$， $3\leq l<k$.

证 由 (4.1.13) 中的第三式， (4.1.12) 中的第三式 (k- 正则的情形) 和 (4.1.12), 有

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{k-l} s m_{l+s}^{t} &\geq t\varphi_t - l\nu = \left(1-\frac{l}{k}\right)t\varphi_t - \frac{l}{k}\sum_{\substack{j\geq 3\\ j\neq t}} j\varphi_j \\ &= \frac{k-l}{k}t\left(\frac{2k\chi(S)}{2k-(k-2)t} - \sum_{\substack{j\geq 3\\ j\neq t}}\frac{2k-(k-2)j}{2k-(k-2)t}\varphi_j\right) \\ &\quad - \frac{l}{k}\sum_{\substack{j\geq 3\\ j\neq t}} j\varphi_j = \Phi(S;\varphi_3,\varphi_4,\cdots).\end{aligned}$$

□

由 (4.1.15) 和 (4.1.13) 中的第二式，有

$$m_k^t \geq -(k-l-1)\nu + \Phi(S;\varphi_3,\varphi_4,\cdots), \tag{4.1.16}$$

其中 $3\leq l<k$. 为简便，我们记

$$\begin{aligned}\Psi(S;\varphi_3,\varphi_4,\cdots) &= \frac{2t\chi(S)}{2k-(k-2)t} \\ &\quad + \sum_{\substack{j\geq 3\\ j\neq t}}\frac{[(k-2)t-2(k-1)]j-2t}{2k-(k-2)t}\varphi_j.\end{aligned} \tag{4.1.17}$$

定理 4.1.3 (第二不等式)　对于曲面 S 上的 k- 多面形，有

$$m_k^t \geq \Psi(S; \varphi_3, \varphi_4, \cdots). \tag{4.1.18}$$

其中，$t \geq 3, t \neq 2k/(k-2)$, $k \geq 3$.

证　由 (4.1.12) 和 (4.1.2) 的第三式 (k- 正则情形), 可得

$$\nu = \frac{2t\chi(S)}{2k-(k-2)t} + 2\sum_{\substack{j\geq 3\\ j\neq t}} \frac{j-t}{2k-(k-2)t}\varphi_j. \tag{4.1.19}$$

将 (4.1.19) 形式的 ν 代入到 (4.1.16) 中，化简之后，即可得不等式 (4.1.18).　♮

从上面所说的二个不等式出发，可直接导出一批已经知道的结果 [Liu 20-21]. 这里仅提供几个常用的.

推论 4.1.1　对于曲面 S 上的 k- 多面形，若 $\chi(S)>0$, 即 S 是球面和射影平面，则只有 $k \leq 5$ 时才有意义. 或者说，在曲面 S, $\chi(S)>0$, 上的任何多面形总有一个节点和一个面的次至多为 5. 特别地，任何平面图均有一个节点和一个面次至多为 5.　♮

推论 4.1.2　对于环面上和 Klein 瓶上的 k- 多面形，有 $k \leq 6$. 且，若 $k=6$, 则所有的面皆三角形.　♮

推论 4.1.3　在球面上，或射影平面上，任何 4- 或 5- 多面形均有一个面是三角形. 特别地，一个平面图，如果节点的次不小于 4, 则必有一个面为三角形. 在环面上，或 Klein 瓶上，任何 4- 或 5- 多面形均有一个面为三角形.　♮

推论 4.1.4　在曲面 S,$\chi(S)<0$, 上的任一 k- 多面形均有一个次不大于 $\lfloor 2k(1-\chi(S))/(k-2)\rfloor$ 的面.　♮

§4.2 Jordan 曲线定理

在拓扑学中， Jordan 曲线定理的经典说法是任何一个简单的闭曲线将球面分为两个连通的区域均以它为边界. 本节讨论它在图论中的说法与证明.

令 $\Sigma = \Sigma(G; F)$ 是一个多面形，它的基准图为 $G = (V, E)$,F 为面的集合. 如果 G 的任何一个非面边界的圈 C 有性质：存在 G 的两个真子图 In 和 Ou 使得

$$In \cup Ou = G;\ In \cap Ou = C, \tag{4.2.1}$$

则称 Σ 具有 *第一 Jordan 性*, 或简记为 *1-曲线性*. 对于一个图 G, 如果存在一个多面形 $\Sigma = \Sigma(G; F)$ 具有 1-曲线性. 当然，为了使本节所讨论的问题有意义，我们总是假设在 $\Sigma = \Sigma(G; F)$ 中 F 的所有元素皆 G 的圈. 或者更确切地， $f \in F$ 的边界皆 G 中的圈.

定理 4.2.1 (第一 Jordan 定理) 若 G 是平面的，则 G 具有 1- 曲线性.

证 因为 $\mathcal{H}_1(\Sigma) = 0, \Sigma = \Sigma(G; F)$, 由定理 3.2.5 可知，$\mathrm{Im}\partial_2 = \mathrm{Ker}\partial_1 = \mathcal{C}$, 即 G 的循环空间. 从而， $\mathrm{Im}\partial_2 \supseteq F$ 且在 F 中含有 $\mathcal{C}$ 的一组基. 由此，对任何一个圈 $C \notin F$, 存在 F 的一个子集 D 使得

$$C = \sum_{f \in D} \partial_2 f;\ C = \sum_{f \in F \setminus D} \partial_2 f. \tag{4.2.2}$$

又，若记

$$Ou = G\Big[\bigcup_{f \in D} f\Big];\ In = G\Big[\bigcup_{f \in F \setminus D} f\Big],$$

则由于 G 的每一条边在 F 的元素中恰出现二次必有 Ou 和 In 满足 (4.2.1) 中的关系，即 G 具有 1- 曲线性. ♮

令 $\Sigma^* = \Sigma(G^*; F^*)$ 为 $\Sigma = \Sigma(G; F)$ 的对偶多面形. 对于 G 中的一个图 C, 记 $C^* = \{e^* | \forall e \in C\}$, 或者说 $C \in \mathcal{G}_1$ 的在 $\mathcal{G}_1^*$ 中的相应向量.

引理 4.2.1 令 C 为 Σ 中一个圈. 则，$G^* \backslash C^*$ 有至多两个连通片.

证 设 H^* 为 $G^* \backslash C^*$ 的一个连通片，但非仅有的一个. 令 D 是 F 中相应 $V(H^*)$ 的子集. 则

$$C' = \sum_{f \in D} \partial_2 f \subseteq C.$$

然，若 $\emptyset \neq C' \subset C$, 则 C 本身并非圈，与引理的条件矛盾. 故，$C' = C$. 由于每条边在 F 的元素中恰出现二次，只能

$$C = \sum_{f \in F \backslash D} \partial_2 f.$$

从而，由 $F \backslash D$ 可确定 $G^* \backslash C^*$ 的另一个连通片. ♮

对于一个多面形 $\Sigma = \Sigma(G; F)$ 和它的对偶 $\Sigma^* = \Sigma(G^*; F^*)$, 若 C 是 G 上的一个圈使得 $G^* \backslash C^*$ 恰有二个连通片，则称 C 具有 第二 *Jordan* 性, 或简记为 2-曲线性. 若图 G 的所有圈都具有 2- 曲线性，则 G 本身也被称为具有 2-曲线性.

定理 4.2.2 (第二 Jordan 定理) 一个图 G 具有 2- 曲线性，当且仅当 G 是可平面的.

证 先证必要性. 由于对 G 的任何圈 C 恰使 $G^* \backslash C^*$ 具有两个连通片. 任何 C^* 只要与 G 中的一圈在对偶意义下相应

必为 G^* 的上圈. 由于 G^* 的每一边在 V^* 的元素，它们全是上圈，中恰出现二次，则由引理 4.2.1 知 V^* 中含有 $\mathrm{Ker}\delta_1^*$ 的一组基. 而且，V^* 为 $\mathrm{Im}\delta_0^*$ 的一个子集. 从而，$\mathrm{Ker}\,\delta_1^* \subseteq \mathrm{Im}\delta_0^*$. 另一方面，由引理 3.3.2, 有 $\mathrm{Im}\,\delta_0^* \subseteq \mathrm{Ker}\delta_1^*$. 这就只能 $\mathrm{Ker}\delta_1^* = \mathrm{Im}\,\delta_0^*$. 即，$\widetilde{\mathcal{H}}_1(\Sigma^*) = 0$. 由定理 3.3.2 的对偶情形，$G^*$ 必为可平面的. 从而，G 是可平面的. 反之，再证充分性. 由平面对偶性，对于 G 中的任一圈 C, C^* 必为 G^* 中上圈. 从而，$G*\backslash C^*$ 有两个连通片. 这就是 2- 曲线性. ♮

对于一个图 G, 当然连通无环，$\Sigma = \Sigma(G;F)$ 为它的一个准基形，令 C 是一个圈. E_C 为与 C 关联非 C 上的边的集合. 在 E_C 上定义一个等价，用 $\sim_C$ 表示，作为如下的二元关系的传递闭包：$\forall a, b \in E_C$,

$$\begin{aligned} \sim_C b \Leftrightarrow & \exists f \in F, (a^{\alpha}C(a,b)b^{\beta} \subset f) \\ & \vee (b^{-\beta}C(b,a)a^{-\alpha} \subset f), \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

其中 $C(a,b)$, 或 $C(b,a)$ 分别为 $C \cap f$ 上的从 a 到 b, 或从 b 到 a 的路. 可以看出，总有

$$|E_C/\sim_C| \leq 2.$$

且，对于任何非 F 中的元素的圈 C, 等式成立当且仅当 Σ 是可定向的. 这时，用 $E_{\mathcal{L}} = E_{\mathcal{L}}(C)$ 和 $E_{\mathcal{R}} = E_{\mathcal{R}}(C)$ 表示此二等价类. 进而，令 $V_{\mathcal{L}}$ 和 $V_{\mathcal{R}}$ 分别为被连接 $E_{\mathcal{L}}$ 和 $E_{\mathcal{R}}$ 中二边的路通过的节点的集合. 由 G 的连通性可知 $V_{\mathcal{L}} \cup V_{\mathcal{R}} = V \backslash V(C)$. 如果 $V_{\mathcal{L}} \cap V_{\mathcal{R}} = \emptyset$, 则称 C 具有*第三 Jordan 性*. 或者称 3–曲线性. 特别地，若 C 具有 3- 曲线性，则连 $V_{\mathcal{L}}$ 和 $V_{\mathcal{R}}$ 的每一条路必与 C 相交 (即有公共节点). 从而，C 也具有 1- 曲线性. 若 G 的准基形 Σ 的每一个非面边界的圈均具有 3- 曲线性，则也称 G 具

有 3-曲线性.

引理 4.2.2 令 C 为图 G 的一个圈，$\Sigma = \Sigma(G;F)$ 为 G 的一个可定向的准基形. 如果 C 具有 2- 曲线性，则 C 具有 3- 曲线性. 反之，若 $V_{\mathcal{L}}(C) \neq \emptyset$, $V_{\mathcal{R}}(C) \neq \emptyset$ 和 C 具有 3- 曲线性，则 C 具有 2- 曲线性.

证 对于一个节点 $v^* \in V^* = V(G^*)$, 令 $f(v^*) \in F$ 为 Σ 中相应的面. 设 In^* 和 Ou^* 为 $G^*\backslash C^*$ 的两个连通片 (由于 C 具有 2- 曲线性). 则,

$$\begin{cases} In = \bigcup_{v^* \in In^*} f(v^*); \\ Ou = \bigcup_{v^* \in Ou^*} f(v^*) \end{cases}$$

为 G 的子图且使得

$$In \cup Ou = G \text{ 和 } In \cap Ou = C.$$

从而，有 $E_{\mathcal{L}} \subset In$ 和 $E_{\mathcal{R}} \subset Ou$ (或反之，$E_{\mathcal{L}} \subset Ou$ 和 $E_{\mathcal{R}} \subset In$). 剩下的就是要证 $V_{\mathcal{L}} \cap V_{\mathcal{R}} = \emptyset$. 否则，即 $V_{\mathcal{L}} \cap V_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$, 则，$In$ 和 Ou 必有一个节点公共并且它不在 C 上. 从而，In 和 Ou 有一条公共边不在 C 上. 与 $In \cap Ou = C$ 矛盾.

反之，用反证法. 由引理 4.2.1, 可以设 $G^*\backslash C^*$ 是连通的. 则，在 $G^*\backslash C^*$ 中有一条路 $P^*(v_1^*, v_2^*)$ 使得 $V(f(v_1^*)) \cap V_{\mathcal{L}} \neq \emptyset$ 和 $V(f(v_2^*)) \cap V_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$. 记

$$H = \bigcup_{v^* \in P^*} f(v^*) \subseteq G.$$

设 $P = v_1 v_2 \cdots v_l$ 是 H 中连 $V_{\mathcal{L}}$ 和 $V_{\mathcal{R}}$ 的最短路. 往证 P 与 C 无公共节点. 否则，设 v_{i+1} 是第一个与 C 公共的节点. 由 P 的最短性，v_i 不在 $V_{\mathcal{R}}$ 中. 设 $v_{i+1}, \cdots, v_{j-1}$, $i+2 \leq j < l$, 在

C 上但 v_j 不在 C 上. 由 $E_{\mathcal{L}}$ 的定义, $(v_{j-1}, v_j) \in E_{\mathcal{L}}$. 从而, $v_j \in V_{\mathcal{L}}$. 与 P 的最短性矛盾. 然而, 由 P 与 C 无公共节点, 必有 $V_{\mathcal{L}} \cap V_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$. 又与 C 具有 3- 曲线性矛盾. ♮

定理 4.2.3 (第三 Jordan 定理) 令 $G = (V, E)$ 是一个图. $\Sigma = \Sigma(G; F)$ 为它的一个可定向的准基形. 则, G 具有 3-曲线性当且仅当 G 是可平面的.

证 由定理 4.2.2 和引理 4.2.2, 充分性显然. 下面往证必要性. 用反证法. 假设 G 不是可平面的. 由引理 3.2.6, $\mathrm{Im}\partial_2 \subseteq \mathrm{Ker}\partial_1 = \mathcal{C}$, 即 G 的循环空间. 由定理 3.2.5, $\mathrm{Im}\partial_2 \subset \mathrm{Ker}\partial_1$. 从而, 存在一个圈 $C \in \mathcal{C} \backslash Im\ \partial_2$ 不具有 2- 曲线性. 而且, 还有 $V_{\mathcal{L}} \neq \emptyset$ 和 $V_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$. 因为若不然, 可设 $V_{\mathcal{L}} = \emptyset$. 令 $D = \{f | \exists e \in E_{\mathcal{L}}, e \in f\} \subset F$. 由于 $V_{\mathcal{L}} = \emptyset$, 任何 $f \in D$ 均只含有 C 的边和 C 的弦. 则, 必有

$$C = \sum_{f \in D} \partial_2 f.$$

这就与 $C \notin \mathrm{Im}\partial_2$ 矛盾. 从而, 由引理 4.2.2 可知 C 不具有 3- 曲线性. 又与前提条件矛盾. ♮

§4.3 唯一性

设 $\Sigma = \Sigma(G; F)$ 为 $G = (V, E)$ 的一个平面嵌入. 若在 Σ 中存在一个面具有如下形式:

$$f = Aa^{\alpha} b^{\beta} Bc^{\delta} d^{\lambda} \tag{4.3.1}$$

使得 $\Sigma \backslash \{f\}$ 可分划为两个部分 $\{f_1^{(1)}, \cdots, f_s^{(1)}\}$ 和 $\{f_1^{(2)}, \cdots, f_t^{(2)}\}$ 且

$$\begin{cases} \Sigma_1 = \left(b^{\beta} Bc^{\delta}, f_1^{(1)}, \cdots, f_s^{(1)}\right); \\ \Sigma_2 = \left(d^{\lambda} Aa^{\alpha}, f_1^{(2)}, \cdots, f_t^{(2)}\right) \end{cases} \tag{4.3.2}$$

为两个多面形 (当然，平面的), 则称 Σ 是平面地 1- 可分离的. 明显地，若 Σ 是平面地 1- 可分离的，则 G 是可分离的. 因为这时，$G = G_1 \dot{+} G_2$, 即 $G = G_1 \cup G_2$ 且 $G_1 \cap G_2 = \{v\}, v \in V$, 其中 G_1, 和 G_2 分别为多面形 Σ_1 和 Σ_2 的基准图.

定理 4.3.1 令 G 为一个可分离的平面图. 即，$G = G_1 \dot{+} G_2$. 其中 G_1, 和 G_2 均为不可分离的且均至少有两条边. 设 Σ_1 和 Σ_2 分别为 G_1 和 G_2 的平面嵌入. 则，G 至少有 $2(\rho_v(G_1)\rho_v(G_2))$ 个不同构的平面嵌入使得它们均可平面地 1- 分离为 Σ_1 和 Σ_2. 其中，$\rho_v(G_1)$ 和 $\rho_v(G_2)$ 分别为公共节点 v 在 G_1 和 G_2 中的次.

证 设 $E_v(G_1) = \{a_1, a_2, \cdots, a_{\rho_1}\}$ 和 $E_v(G_2) = \{b_1, b_2, \cdots, b_{\rho_2}\}$, $\rho_1 = \rho_v(G_1), \rho_2 = \rho_v(G_2)$. 令

$$\begin{cases} \mathcal{A}_1 = \{A_i a_i^{-1} a_{i+1} | i = 1, 2, \cdots, \rho_1, a_{\rho_1+1} = a_1\}; \\ \mathcal{A}_2 = \{B_j b_j^{-1} b_{j+1} | j = 1, 2, \cdots, \rho_2, b_{\rho_2+1} = b_1\} \end{cases}$$

分别为 Σ_1 和 Σ_2 中与 v 关联的面的集合. 则，我们可以按如下方式由 Σ_1 和 Σ_2 得到 G 的 $\rho_1\rho_2$ 个平面嵌入：对于 $1 \le i \le \rho_1$, $1 \le j \le \rho_2$,

$$\begin{cases} \Sigma_{(i,j)} = (A_i a_i^{-1} b_j B_j^{-1} b_{j+1} a_{i+1}, \Sigma_1\langle i\rangle, \Sigma_2\langle j\rangle); \\ \Sigma_{(i,j)} = (A_i a_i^{-1} b_{j+1} B_j b_j^{-1} a_{i+1}, \Sigma_1\langle i\rangle, \Sigma_2\langle j\rangle). \end{cases} \tag{4.3.3}$$

其中，$\Sigma_1\langle i\rangle$ 和 $\Sigma_2\langle j\rangle$ 分别为除 $A_i a_i^{-1} a_{i+1}$ 外 Σ_1 的所有面和除 $B_j b_j^{-1} b_{j+1}$ 外 Σ_2 的所有的面. 由于在 Σ 中有一个面是与 v 关联的并且是由 Σ_1 的在 $\mathcal{A}_1$ 中，或者在

$$\mathcal{A}_1^{-1} = \{a_{i-1}^{-1} a_i A_i^{-1} | i = 1, 2, \cdots, \rho_1, a_{\rho_1+1} = a_1\}$$

中的一面同 Σ_2 的在 $\mathcal{A}_2$ 中的一个面合成的. 容易由多面形同构的定义看出，Σ 的这 $2\rho_1\rho_2$ 个嵌入为所有可能的以这种方式由

Σ_1 和 Σ_2 形成的嵌入. 至此, 只要证明对于任何 $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$, 总有 $\Sigma_{(i_1,j_1)} \not\sim \Sigma_{(i_2,j_2)}$ 就够了. 事实上, $\Sigma_{(i_1,j_1)}$ 与 $\Sigma_{(i_2,j_2)}$ 除一个面外所有的面均相同. 然, 由于 G_1 和 G_2 的不可分离性及至少有二条边可知 $\Sigma_{(i_1,j_1)}$ 和 $\Sigma_{(i_2,j_2)}$ 这一个例外面 $f_{(i_1,j_1)}$ 和 $f_{(i_2,j_2)}$ 间非初等等价. 即

$$\begin{aligned} f_{i_1,j_1} &= A_{i_1} a_{i_1}^{-1} b_{j_1+1} B_{j_1} b_{j_1}^{-1} a_{i_1+1} \\ &\not\sim_{EL} f_{i_2,j_2} = A_{i_2} a_{i_2}^{-1} b_{j_2+1} B_{j_2} b_{j_2}^{-1} a_{i_2+1}. \end{aligned}$$

从而, 定理得证. ▮

若在一个平面的多面形 $\Sigma = \Sigma(G; F), G = (V, E)$, 中有二个面 $f_1, f_2 \in F$,

$$\begin{cases} f_1 = A_1 a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} B_1 c_1^{\delta_1} d_1^{\lambda_1} \\ f_2 = A_2 a_2^{\alpha_2} b_2^{\beta_2} B_2 c_2^{\delta_2} d_2^{\lambda_2} \end{cases}$$

使得 $\Sigma\langle f_1, f_2\rangle = \Sigma \backslash \{f_1, f_2\}$ 可以划分为二个部分 $\Sigma_1\langle f_1, f_2\rangle$ 和 $\Sigma_2\langle f_1, f_2\rangle$ 且

$$\begin{cases} \Sigma_1 = (A_1 a_1^{\alpha_1} b_2^{\beta_2} B_2 c_2^{\delta_2} d_1^{\lambda_1}, \Sigma_1\langle f_1, f_2\rangle); \\ \Sigma_2 = (A_2 a_2^{\alpha_2} b_1^{\beta_1} B_1 c_1^{\delta_1} d_2^{\lambda_2}, \Sigma_2\langle f_1, f_2\rangle) \end{cases} \tag{4.3.4}$$

皆至少具有二条边的多面形 (当然, 平面的), 则称 Σ 为 2-可分离的. 面对 $\{f_1, f_2\}$ 称为 Σ 的 分离对. 而且, 根据 §1.5 中多面形的定义, 在 Σ 的对偶多面形 Σ^* 中也有二个面 $f_1^*, f_2^* \in F$,

$$\begin{cases} f_1^* = A_1^* a_1^{-\alpha_1} b_1^{\beta_1} B_1^* c_1^{-\delta_1} d_1^{\lambda_1} \\ f_2^* = A_2^* a_2^{-\alpha_2} b_2^{\beta_2} B_2^* c_2^{-\delta_2} d_2^{\lambda_2}. \end{cases}$$

它们在 Σ 中的相应节点为 v_1 和 v_2. 因为 Σ 的基准图 G 去掉 v_1 和 v_2 后变为不连通的, 也称 G 是 2-可分离的. 节点对 (v_1, v_2) 也称为图 G 的 分离对. 自然, 一个可分离的图也可称为 1-可分

离的. 若一个图没有分离对，则称它为 3-连通的. 3- 连通图的平面多面形被称为 c–网.

定理 4.3.2 一个不可分离的平面图 G 是 3- 连通的，当且仅当它的平面对偶是 3- 连通的.

证 由推论 3.2.2 和上面刚讨论的可知，一个不可分离平面图是 2- 可分离的当且仅当它的平面对偶是 2- 可分离的. 从而，由 3- 连通性的定义即得定理. ♮

容易看出，若一个平面图是 2- 可分离的，则它可以有二个不同构的平面嵌入. 事实上，由 (4.3.4) 可得

$$\Sigma' = (f_1', f_2', \Sigma(f_1, f_2)). \tag{4.3.5}$$

其中，$f_1' = B_1 c_1^{\delta_1} c_2^{-\delta_2} B_2^{-1} b_2^{-\beta_2} b_1^{\beta_1}$ 和 $f_2' = A_2 a_2^{\alpha_2} a_1^{-\alpha_1} A_1^{-1} d_1^{-\lambda_1} d_2^{\lambda_2}$. 两个多面形 Σ 和 Σ' 均以 G 为基准图和均为平面的. 但，它们是不同构的. 若 G 的所有的平面嵌入皆同构，则，称 G 有唯一的平面嵌入，或简称为具有 *唯一性*.

定理 4.3.3 一个不可分离平面图 G, 其节点的次和圈的长度均不小于 3, 具有唯一性当且仅当 G 是 3- 连通的.

证 由上所述任何 2- 可分离平面图在所要求的条件下具有至少二个不同构的平面嵌入，定理的必要性显然.

反之，若 G 在定理条件下是 3- 连通的但 G 有至少二个不同构的平面嵌入 $\Sigma_1 = \Sigma_1(G; F_1)$ 和 $\Sigma_2 = \Sigma_2(G; F_2)$, 则，必存在 Σ_1 上的一个面 $f_1 \in F_1$ 使得 $\partial_2 f_1$ 不是 Σ_2 中的任何一个面的边界. 由于 G 不可分离的，$\partial_2 f_1$ 本身就只能是一个圈 C. 由 §4.2 中的 Jordan 定理，F_2 中的面被划分为两个部分 $F_2^{(1)}$ 和 $F_2^{(2)}$ 使得 G_1 和 G_2 分别为多面形 $\Sigma_2^{(1)}(G_1; F_2^{(1)} + \{C\})$ 和

$\Sigma_2^{(2)}(G_2; F_2^{(2)} + \{C\})$ 的基准图且

$$G_1 \cup G_2 = G; \qquad G_1 \cap G_2 = C. \tag{4.3.6}$$

然，$C = \partial_2 f_1$ 在 Σ_1 上. 故，G_1 和 G_2 在 f_1 的同一例. 这就意味在 Σ_1 中还有一个面 $f \neq f_1$ 使得 $\{f_1, f\}$ 形成一个分离对. 从而，由平面性，G 是 2- 可分离的. 与 G 的 3- 连通性矛盾. 充分性得证. ∎

对于可平面图 $G = (V, E)$, 令 $\Sigma = \Sigma(G; F)$ 是它的一个平面嵌入. 若 G 有一个分离对 $\{u, v\}, u, v \in V$, 则 Σ 有一个分离对 $\{f_1, f_2\}, f_1, f_2 \in F$, 与 $\{u, v\}$ 相应. 如 (4.3.4) 所示的变换 Σ 成为 $\Sigma_1 = \Sigma(G_1; F_1)$ 和 $\Sigma_2 = \Sigma(G_2; F_2)$ 的运算称为 *劈分G 为 G_1 和 G_2*. 而 G_1 和 G_2 则被称为 G 的 *劈块*. 若 G_1 为 G 的一个劈块而且在 G_1 中不再有分离对, 则称 G_1 为 *基本劈块*. 注意, 若 $\{u, v\}$ 为 G 的一个分离对且 $(u, v) \in E$, 则 e 本身就是 G 的一个劈块而且还是基本劈块. 容易看出，如果收缩所有那些两端属于不同分离对而且本身又不是劈块的边，则所有的图 (可能出现重边) 的基本劈块是唯一确定的. 我们记这样由 G 得到的图为 $\tilde{G}$, 并称它为 G 的 *基本核*. 也易证明，任何不可分离的可平面图具有唯一的基本核并且其基本劈块的数目与它的基本核的基本劈块数目相同. 图 G 的非单边组成的基本劈块的数目用 $\alpha_{Bl}(G)$ 表示. 一个劈对 $\{u, v\}$, 若 $G = G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 = \{u, v\}$, 但 $\{u, v\}$ 即非 G_1 的也非 G_2 的分离对，则称它为 *简单的*. 若 G 的所有的分离对皆简单的，则称 G 为 *简单 2- 可分离的*.

若将 $\tilde{G}$ 中的所有基本劈块作为节点，两个节点相邻当且仅当它们相应的基本劈块在 $\tilde{G}$ 中有公共的分离对，则，这样得到的图被称为 $\tilde{G}$ 的 *劈块图*, 用 $Bl(\tilde{G})$ 表示. 可以证明，若 G 是简单 2- 可分离的，则 $Bl(\tilde{G})$ 是一个森.

定理 4.3.4 一个不可分离的可平面图 G, 简单 2- 可分离且所有的节点的次和所有的圈长皆不小于 3, 具有 $2^{\alpha_{Bl}(G)-1}$ 个不同构的平面嵌入.

证 对于 $\alpha_{Bl}(G)$ 用归纳法. 若 G 没有分离对, 即 G 是 3- 连通的, 则, $\alpha_{Bl}(G)=1$. 由定理 4.3.3 可知定理为真. 一般地, 由于 $Bl(\tilde{G})$ 是一个森, G 有一个基本劈块 G_1 只关联一个分离对, 即它相应 $Bl(\tilde{G})$ 中的一个显节点, 或孤立点. 设 $G=G_1\cup G_2$ 且 $G_1\cap G_2=\{u,v\}$. 由归纳假设, G_2 有 $2^{\alpha_{Bl}(G)-2}$ 个不同构的平面嵌入. 理由是 $\alpha_{Bl}(G_2)=\alpha_{Bl}(G)-1$. 由于对 G_2 的每一个嵌入, 通过添 G_1 到其上两个对于与 G_2 的公共劈对互为反射的位置可得 G 的二个不同构的平面嵌入. 从而, G 有 $2\bullet 2^{\alpha_{Bl}(G)-2}=2^{\alpha_{Bl}(G)-1}$ 个不同构的平面嵌入. 即得定理.

♮

当然, 若 G 不是简单 2- 可分离的, 则由于一个关联 s_i 个基本劈块的劈对 $\{u_i,v_i\}$ 可产生 $(s_i-1)!$ 个不同构的平面嵌入. 由此定理可知 G 的不同构的平面嵌入的总数应为

$$2^{\alpha_{Bl}(G)-1}\prod_{i\geq 1}((s_i-1)!)^{l_i}.$$

其中, l_i 为关联 s_i 个基本劈块的劈对的数目.

§4.4 凸表示

令 $\Sigma=\Sigma(G;F)$ 是一个平面多面形, 其基准图 $G=(V,E)$, F 为面的集合. 我们这里所关心的问题是如何将 Σ 在平面上表示. 或者说将 Σ 划在平面上使得 Σ 的节点用平面上的点表示, 边用一个曲线或直线段表示并且没有任何两个线段在某个内点处交叉, 或者说共点. 特别地, 我们要考虑每一线段为直

线段的情形. 这时, 称之为 G 的 *直线嵌入*. 因为我们只讨论 G 无环且无重边, 它的任何平面多面形 (若有的话) 必既无 1- 次的也无 2- 次的面. 当然, 这些对于我们关心的问题确非本质. 即允许我们只讨论所有的面的次皆不小于 3 的情形. 若一个直线嵌入的所有节点均在平面的整点, 或者说方格点 (即它的两个坐标均为整数) 上, 则称之为一个 *方格点嵌入*.

引理 4.4.1 *如果一个图有一个方格点嵌入, 则它必有这样的一个方格点嵌入使得每一个面和每一条边均有一个内点为整点, 即方格点.*

证 设 G 有一个方格点嵌入 $G(\Sigma)$. 若其上有一个面 f(或者一条边 e) 无内点为方格点. 令 d_f (或 d_e) 为 f(或 e) 边界上二节点之间的最短距离 (或长度). 则, 将欧氏平面上的格进行细分使得相邻的二个方格点之间之距离小于 $d_f/2$(或 $d_e/2$), 即可得嵌入 $G(\Sigma)$ 具有引理所要求的性质. ♮

引理 4.4.2 *任何可平面图 G 均有一个方格点嵌入.*

证 因为任何一个多面形的基准图均为同阶三角剖分的基准图的子图, 我们可以只讨论三角剖分. 对于 G 的阶用归纳法. 当 G 较小时, 不管怎样选择无限面均易验证. 一般地, 设 v 是一个次不超过 5 的节点 (推论 4.1.1). 只需讨论: $\rho(v) = 3, 4,$ 或 5 三种情形. 因为无限面可选任一面, 总可约定 v 在无限面的边界上.

当 $\rho(v) = 3$ 时. 令 $G' = G - v$. 由于 G' 仍为三角剖分之基准图, 从归纳假设可知 G' 有一个方格点嵌入 $\Sigma(G', F(v))$ 使三个与 v 相邻的节点 v_1, v_2 和 v_3 全在无限面边界上, 其中 $F(v)$ 为由所有不与 v 关联的面和一个新面组成. 这个新面为 $\Sigma(G - v, F(v))$ 的无限面. 自然, v_1, v_2 和 v_3 在它的边界上.

设 v_1v_2, v_2v_3 和 v_1v_3 中最长的为 v_2v_3 且在水平直线上. 由于 v_2v_3 的长度大于 1, 必有一个内点为方格点 p. 这样, 总可以取 v 为从 p 过 v_1 的射线上的一个方格点 (若不存在, 可通过细分使得其上出现方格点或者取一个方格点与它充分接近). 在 $\Sigma(G', F(v))$ 的无限面内连直线段 $vv_i, i=1,2,3$, 即得方格点嵌入 $\Sigma(G, F)$.

当 $\rho(v)=4$ 时. 令 $v_i=1,2,3,4$, 为与 v 相邻的节点. 由于是三角剖分, 必有圈 $v_1v_2v_3v_4v_1v_1$ 在 $G-v$ 中. 这时, 令 G' 为在 $G-v$ 中连边 (v_1,v_3) 所得之图. 由归纳假设, G' 有一个方格点嵌入 $\Sigma(G', F(v))$. 它的无限面边界为 $v_1v_4v_3v_1$. 设直线 v_1v_2 与线段 v_4v_3 有一个公共点 p. 并且为方便, 不妨设 v_3v_4 为水平的. 由引理 4.4.1, 令 q 为 p 和 v_4 之间的一个方格点. 这样, 我们总可以取沿线 qv_1 从 v_1 开始的射线上或充分接近此射线的一个方格点为 v 使得在 $\Sigma(G', F(v))$ 上去掉边 v_1v_3 然后再连接线段 $vv_i, i=1,2,3,4$, 为 G 的一个方格点嵌入.

当 $\rho(v)=5$ 时. 与 $\rho(v)=4$ 的情形相仿地也可导出 G 的一个方格点嵌入. ▯

对于 G 的一个平面嵌入 $G(\Sigma)$, 若有 G 的一个方格点嵌入与 $G(\Sigma)$ 同构并且它们的无限面限定相对应, 则称 $G(\Sigma)$ 为 *方格点共存的*.

定理 4.4.1 任何一个图的平面嵌入均为方格点共存的.

证 同样地允许我们只讨论三角剖分的情形. 对图 G 的阶用归纳法. 当阶小时, 易验证. 一般地, 由推论 4.1.1, 只需考虑存在一节点 v, $\rho(v)=3,4$ 或 5, 三种情况.

情形 1 $\rho(v)=3$. 若 v 在 $G(\Sigma)$ 的无限的边界上, 由引理 4.4.2 可知定理为真. 否则, v 为 $G(\Sigma)$ 的在无限面边界内

部区域的一个节点. 记 $V_v=\{v_1,v_2,v_3\}$, 则三角形面 $v_1v_2v_3$ 在 $G'=G-v$ 的方格点嵌入的内部, 即有限面. 由归纳法假设, G' 的这种嵌入存在. 这样, 总可在面 $v_1v_2v_3$ 的内部取一点作为 v 然后连线段 $vv_i, i=1,2,3$, 求得 G 的一个方格点嵌入且保持无限面相应.

情形 2 $\rho(v)=4$. 与情形 1 相仿地, 只不过这时的 G' 为在 $G-v$ 上添一条连 v_1 和 v_3(或 v_2 和 v_4) 的边. 其中 $V_v=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$.

情形 3 $\rho(v)=5$. 由引理 4.4.2 也只需讨论 v 在 $G(\Sigma)$ 的无限面边界内部区域. 令 $V_v=\{v_i|\ i=1,2,\cdots,5\}$. 若 G' 为在 $G(\Sigma)$ 中去掉节点 v 和与它关联的边, 然后添上代表二边 (v_1,v_3) 和 (v_1,v_4) 的线段 v_1v_3 和 v_1v_4 所得到的嵌入. 由归纳法假设, G' 有一个方格点嵌入且保持无限面相应. 由引理 4.4.1 总可令在这个嵌入中存在一个充分接近 v_1 的方格点 p 在三角形 $v_1v_3v_4$ 的内部使得直线段 pv_i, $i=1,2,\cdots,5$ 均落在五边形 $v_1v_2v_3v_4v_5v_1$ 的内部. 由此, 只要取 $v=p$, 并将 G' 的这个嵌入中的边 v_1v_3 和 v_1v_4 去掉, 然后添上线段 $vv_i, i-1,\cdots,5$, 即得 G 的一个方格点嵌入与 $G(\Sigma)$ 同构且保持无限面对应. ♮

一个多边形, 如果与它共面的任何一条直线同其内部的公共部分均不会有二个或更多的连通片而且至少其中有一个为有限的线段, 则称它对内为*凸的*. 由这个定义可知, 一个多边形是凸的当且仅当在平面上的补, 即对外是凸的. 一个图的平面嵌入 (如果存在), 如果所有它的面全是凸多边形, 则称它为*凸嵌入*. 若一个凸嵌入的所有节点均为平面上的方格点, 则称它为*方格点凸嵌入*. 对于一个平面嵌入的一个面, 如果有 G 的一个方格点凸嵌入与这个平面嵌入同构且使此面为无限面, 则此面被称为*方格点凸可扩张的*. 一个方格点凸嵌入的一个有限

面 f, 若存在 f(或者无限面 f_0 当 f adj f_0 时) 的内部区域中的方格点 p 使得每一条从 p 穿过 f 边界上的射线与 f 的相邻面(除 f_0 外) 的内部区域无公共点，则称 f 具有 强凸性. 从几何上说，我们总能使一个方格点凸嵌入有一个面具有强凸性.

引理 4.4.3 图 G 的平面嵌入的一个面 f 是方格点凸可扩张的当且仅当不在 f 边界上的任何一个节点 v 都有三条由 v 到 f 边界上三个不同节点的路使得其中任何二条路除 v 外无其它公共节点.

证 对 G 的阶用归纳法证明充分性. 由于 G 的嵌入中的节点和面的次均不小于 3, 最小阶的图为 K_4, 它的平面嵌入为正四面体. 对于它，易见引理成立. 一般地，由推论 4.1.1, 只需讨论三种情形. 而且，我们可以不失一般性地假定 f 为无限面.

情形 1 存在 $v \in V, \rho(v) = 3$. 设 $V_v = \{v_1, v_2, v_3\}$. 令

$$\begin{aligned} G' &= G - v + \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3)\} \\ &= (V - v, E(G - v) \cup \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3)\}). \end{aligned}$$

如果 $v \in \partial_2 f$(或者说， v 与 $\partial_2 f$ 关联)，令 $v_2 \notin \partial_2 f$. 容易验证, G' 对于面 f (当 $v \notin \partial_2 f$ 时)，或 f'(当 $v \in \partial_2 f$ 时), 其中

$$\partial_2 f' = \partial_2 f - \{(v, v_1), (v, v_3)\} + \{(v_1, v_2), (v_2, v_3)\},$$

仍满足引理之条件. 由归纳假设， G' 有一个方格点凸嵌入 $G'(\Sigma)$. 当 $v \in \partial_2 f$ 时，设 v 是一个方格点 (引理 4.4.1) 且在由线 $v_1 v_3$ 以及它在 $\partial_2 f'$ 上的前后相继二边所在的直线形成的三角形中. 否则，即 $v \notin \partial_2 f$. 令 v 为三角形面 $v_1 v_2 v_3$ 的内部区域中之一方格点 (同样地，由引理 4.4.1). 在 $G'(\Sigma)$ 上连线段

(v,v_1), (v,v_2) 和 (v,v_3) 即可得 G 的一个方格点凸嵌入并保持 f 为无限面.

情形 2 设 $v \in V, \rho(v)=4$. 由情形 1, 这时 G 的节点的次均不小于 4. 设 $V_v=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$. 同样地, 记 $G'=G-v+\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_4),(v_1,v_4)\}$. 由于 G' 对于 f(若 $v \notin \partial_2 f$, 至多适当地添加一边 (v_1,v_4) 或 (v_2,V_3)), 或者 f'(若 $v \in \partial_2 f$) 使得 $\partial_2 f' = \partial_2 f + e_1 + e_2 + e_3$ (在向量之运算下或者是集合的对称差) 仍满足引理的条件. 其中, $e_1=(v,v_1), e_2=(v,v_4) \in E$, 和 $e_3=(v_1,v_4) \notin \partial_2 f$. 由归纳假设, G' 有一个方格点凸嵌入. 从而, 考虑到可使四边形面 $v_1v_2v_3v_4$(当 $v \in \partial_2 f$ 时) 或那个与 (v_2,v_3) 关联的有限面 (否则, 即当 $v \in \partial_2 f$ 时) 具有强凸性, 用与情形 1 相仿地方法总能得到 G 的一个方格点凸嵌入且保持 f 为无限面.

情形 3 存在 $v \in V, \rho(v)=5$. 由上二情形可知, 这时 G 的所有节点之次均不小于 5. 同样地, 可通过 $G'=G-v+\{(v_i,v_{i+1})|\ i=1,2,\cdots,5,\ v_6=v_1\}$ 至多适当地添加一或二条边而得到所要求的 G 的方格点凸嵌入. 其中, $V_v=\{v_i|\ i=1,\cdots,5\}$ 依 v 处旋的次序.

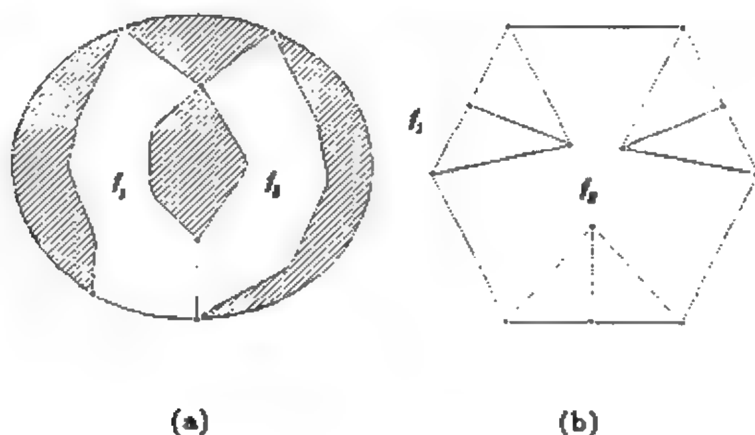
反之, 由图 4.4.1(a) 所示的典型结构, 必要性是显然的. 在那里 f_1 和 f_2 不满足引理条件均不可能作为 G 的凸嵌入的无限面 ▮

若 G 的一个平面嵌入的任何一个面皆方格点凸可扩张的, 则这个嵌入被称为*全方格点凸可扩张的*. 图 4.4.1 (b) 显示了图 G 的一个平面嵌入. 它对于面 f_1 和 f_2 是凸可扩张的但它本身不是全凸可扩张的. 如果一个图 G 有一个平面嵌入是全方格点凸可扩张的, 则称 G 本身为*全方格点凸的*.

定理 4.4.2 一个可平面图 G 是全方格点凸的当且仅当 G 没有节点的分离对.

证 因为 G 的任何平面嵌入的所有节点和面的次均不小于 3, 由引理 4.4.3 必要性是显然的.

对于充分性, 由定理 4.3.3, 只讨论 G 的一个平面嵌入就够了. 因为 G 没有节点的分离对. 对于任一面 f, 任何一个不与 f 关联的节点 v 均有三条到 f 边界上三个不同节点的两两除 v 外无公共节点的路 (否则, 必会出现如图 4.4.1 (a) 所示的结构). 故, 由引理 4.3.3 可知, f 为方格点凸可扩张的. 由选择 f 任意性, 即得 G 是全方格点凸的. ♮



(a) (b)

图 4.4.1

在这里, 所有定理的证明全是存在性的而未触到算法的设计. 关于它们的算法, 可以借助确向树的方法予以实现.

§4.5 注记

4.5.1 对于平面, 多面形的 Euler 公式在构造各种类型具有某种对称性的多面形中 [Cox1] 和在平面的各种砌合中 [GrS1] 是一种很有效力的工具. 然而, 对于一般曲面, 这种问题似乎

是从 80 年代初才开始引起注意 [Liu20-21].

4.5.2 自 1979 年以来就开始了对于 Jordan 曲线定理的一些组合形式的研究 [Tut19,VL1]. 在 [Tut19] 中还提供了一种一般组合地图的理论.

4.5.3 一个平面图的直线表示是由 Fary[Fa1] 首先提出并解决的. 当然, 这里的定理 4.4.1 为 Fary 结果的某种强化形式. 其算法方面, 最近才由 Fraysseix, Pach 和 Pollak 讨论 [FPP1].

4.5.4 可平面图的凸表示是由 Tutte 首先提出并解决的 [Tutt15]. 接着, Tutte [Tut8] 还给出了求一个图的凸嵌入的实现方法. 他用一组线性方程的解同时确定出凸嵌入的节点在平面上的坐标, 并称这种嵌入为 *重心的*. 虽然他没有提到如定理 4.4.2 中的方格点情形, 依这里的引理 4.4.1 或者通过细分将有理坐标转变为整坐标, 其节点总可以安排到方格点上. 一些最优化问题将在第十三章中讨论.

4.5.5 事实上, 我们可以在节点处引进正权, 在无限面边界给定为凸多边形之条件之下求一个凸嵌入使得在考虑到权的方式下边长总和为最小. 详细情形也将在第十三章中讨论.

第五章

平　面　性

§5.1　浸入

图 $G=(V,E)$ 在平面上，或等价地在球面 P_0 上的一个浸入，也记 $\mu(G)$，就作为一个映象 $\mu: G\to P_0$ 使得 $\mu(v)$, $v\in V$, 是一个点和 $\mu(e)$ 是一个连 $\mu(u)$ 和 $\mu(v)$ 的 Jordan 曲线段，即它拓扑等价一个直线段，$e=(u,v)\in E$, 并且具有如下性质：

Im.1　$\mu_V: V\to P_0$ 是一个单射；

Im.2　$\forall e:(u,w)\in E, \neg v\in V(v\neq u, v\neq w), \mu(v)\in\mu(e)$.

从几何的角度看，可以只讨论简单交叉且对任何 $a,b\in E$, $\mu(a)$ 与 $\mu(b)$ 只在有限个点处交叉. 所谓简单交叉，是指 $\mu(a)$ 和 $\mu(b)$ 的这样的一个公共点使沿 $\mu(a)$(或 $\mu(b)$) 过此点时对任意的一个小邻域两侧均含有 $\mu(b)$(或 $\mu(a)$) 上的点. 对于任何二边 $\alpha,\beta\in E$, α 不与 β 相邻，记为 $\alpha\ \overline{\mathrm{adj}}\ \beta$, 定义

$$I_\mu(\alpha,\beta)=\begin{cases}1, & 若\ \mu(\alpha)\cap\mu(\beta)=1(\mathrm{mod}\ 2);\\ 0, & 否则.\end{cases}\tag{5.1.1}$$

并称它为对于浸入 μ, 边 α 和 β 的 交叉指标.

对于 $a, b \in E$, a adj b, 可以看出 $\mu(a)$ 和 $\mu(b)$ 之间的交叉是非本质的，即总可以移走. 这就允许我们只研究 $\mu(\alpha)$ 和 $\mu(\beta)$ 之间的交叉. 其中 $\alpha\ \overline{\mathrm{adj}}\ \beta$, $\alpha,\beta \in E$. 令

$$\begin{cases} \mathcal{D} = \{(\alpha,\beta) | \forall \alpha, \beta \in E, \alpha\ \overline{\mathrm{adj}}\ \beta\}; \\ \mathcal{N} = \{(a,b) | \forall a, b \in E, a \text{ adj } b\}. \end{cases}$$

对于两个浸入 μ_1 和 μ_2, 定义

$$\begin{aligned} \mu_2\ \sim_{\mathrm{im}} \mu_2 \Longleftrightarrow \forall (\alpha,\beta) \in \mathcal{D}, \\ I_{\mu_1}(\alpha,\beta) = I_{\mu_2}(\alpha_1,\beta). \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

当然，由 §1.2 中的 $O1, \tilde{O}2$ 和 $O3$ 可以检验， $\sim_{\mathrm{im}}$ 确为所有浸入的集合上的一个等价. 以后，我们总是不加区别于浸入和它所在的 $\sim_{\mathrm{im}}$ 之下的等价类.

定理 5.1.1 一个连通图 G 的一个浸入确定一个平面嵌当且仅当

$$\forall (\alpha,\beta) \in \mathcal{D}, \qquad I_\mu(\alpha,\beta) = 0. \tag{5.1.3}$$

证 由于 G 的任何一个平面嵌入，或者说一个映象 μ 使得 Im. $1-2$ 满足，必要性是显然的.

反之，对于任何一个浸入 $\mu(G)$ 满足 (5.1.3), 由 §4.2 中所述之 Jordan 定理对任何 $\alpha, \beta \in E$, $\alpha\ \overline{\mathrm{adj}}\ \beta$, 均可使 $\mu(\alpha)$ 和 $\mu(\beta)$ 无任何公共点，当然更不会交叉. 因为这时 $\mu(G)$ 对于平面的补的连通片确定了一个平面多面形的面. 它的基准图为 G. 从而， $\mu(G)$ 为 G 的一个平面嵌入. □

令 $\mathcal{I}$ 为 G 的所有浸入形成的集合. 为了弄清一个图的浸入

与嵌入的关系，也许会想到将 G 处理为一个系统 $\Pi = \Pi(G) = ([\alpha,\beta],[v,a],[u,v]|\forall u,v \in V,\ \forall\alpha,\beta,a \in E)$. 其中 $[\alpha,\beta] = [\beta,\alpha]$, $[v,a] = [a,v]$ 和 $[u,v] = [v,u]$ 分别称为 2–腱腔, 1–腱腔, 和 0–腱腔. 并且引进二元域 $GF(2)$ 上的空间 $\mathcal{L}_2 = \langle[\alpha,\beta]|\forall(\alpha,\beta) \in \mathcal{D}\rangle$, $\mathcal{L}_1 = \langle[v,e]|\forall v \in V,\ \forall e \in E, v\ \overline{\text{ind}}\ e\rangle$, 和 $\mathcal{L}_0 = \langle[u,v]|\forall u,v \in V,\ u\ \overline{\text{adj}}\ v$. 分别称 $\mathcal{L}_2$,$\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_0$ 为 2–空间, 1–空间 和 0–空间. 它们中的向量分别称为 2–向量, 1–向量 和 0–向量. 对于 G 的一个浸入 $\mu \in \mathcal{I}$, 令

$$\psi = \psi_\mu = \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}} I_\mu(\alpha,\beta)[\alpha,\beta]. \tag{5.1.4}$$

可见， ψ 是 $\mathcal{L}_2$ 中的一个向量. 与第三章相仿地，我们还可以引进边缘映象 $\partial_i : \mathcal{L}_i \to \mathcal{L}_{i-1}, i = 2,1,0$, 并规定 $\mathcal{L}_{-1} = 0$, 使得它为由在空间的基上按如下方式所定义的延拓到整个空间，即

$$\begin{cases} \partial_2([\alpha,\beta]) = [u(\alpha),\beta] + [v(\alpha),\beta] \\ \qquad\qquad + [\alpha,u(\beta)] + [\alpha,v(\beta)]; \\ \partial_1([v,\beta]) = [v,u(\beta)] + [v,v(\beta)]; \\ \partial_0([u,v]) = 0. \end{cases} \tag{5.1.5}$$

其中 $u(e)$,$v(e)$ 表示 $e \in E$ 的两个端点， $e = \alpha$, 或 β. 对偶地，上边缘映象 $\delta_i : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_{i+1}, i = 0,1,2$, 且规定 $\mathcal{L}_3 = 0$ 为由如下在基上的定义的到整个空间上的延拓，即,

$$\begin{cases} \delta_0([u,v]) = \sum\limits_{e\in E_u} [e,v] + \sum\limits_{e\in E_v} [u,e]; \\ \delta_1([v,a]) = \sum\limits_{e\in E_v} [e,a]; \\ \delta_2([\alpha,\beta]) = 0. \end{cases} \tag{5.1.6}$$

而且，为了便于处理我们还要先规定如下的关系：

$$\begin{cases} \forall a,b\in \vec{E},[a,b]=0,\ 若\ (a,b)\not\in \mathcal{D}; \\ \forall v\in V,a\in E,[v,a]=0,\ 若\ v \text{ ind } a; \\ \forall u,v\in V,\ [u,v]=0,\ 若\ u \text{ adj } v 或\ u=v. \end{cases} \tag{5.1.7}$$

进而，令 $\Omega=\{(a,b)|\forall a,b\in E\}$. 如果定义

$$\begin{aligned} \sum_{(\alpha,\beta)\in\Omega} A(\alpha,\beta)[\alpha,\beta] &= \sum_{\alpha\in E}\left[\alpha,\sum_{\beta\in E}A(\alpha,\beta)\beta\right] \\ &= \sum_{\beta\in E}\left[\sum_{\alpha\in E}A(\alpha,\beta)\alpha,\beta\right], \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

则注意到第三章中空间 $\mathcal{G}_0,\mathcal{G}_1$ 和 $\mathcal{G}_2$ 间的边缘映象和上边缘映象，我们就有 $\forall u,v\in V$, $\alpha,\beta,a\in E$,

$$\begin{cases} \partial_2([\alpha,\beta])=[\partial_1\alpha,\beta]+[\alpha,\partial_1\beta]; \\ \partial_1([v,a])=[v,\partial_1 a]; \\ \partial_0([u,v])=0, \end{cases} \tag{5.1.9}$$

和 $\forall u,v\in V$, $\alpha,\beta,a\in E$,

$$\begin{cases} \delta_0([u,v])=[\delta_0 u,v]+[u,\delta_0 v]; \\ \delta_1([v,a])=[\delta_0 v,a]; \\ \delta_0([\alpha,\beta])=0. \end{cases} \tag{5.1.10}$$

同样也可以看出 $\partial_i\in$ Hom $(\mathcal{L}_i,\mathcal{L}_{i-1})$ 和 $\delta_i\in$ Hom $(\mathcal{L}_i,\mathcal{L}_{i+1})$,

$i=0,1,2$. 换言之，我们有形式

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{L}_0(\Pi,GF(2)) & \xrightarrow{\delta_0} & \mathcal{L}_1(\Pi,GF(2)) & \xrightarrow{\delta_1} & \mathcal{L}_2(\Pi,GF(2)) & \xrightarrow{\delta_2} 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \xleftarrow{\partial_0} \mathcal{L}_0(\Pi,GF(2)) & \xleftarrow{\partial_1} & \mathcal{L}_1(\Pi,GF(2)) & \xleftarrow{\partial_2} & \mathcal{L}_2(\Pi,GF(2)) & \end{array}$$

为可交换的.

至此，我们再回到图的浸入. 由于 $\mathrm{Ker}\,\delta_2=\mathcal{L}_2$, 自然 $\mathcal{L}_2$ 本身就是 Π 的 2–上循环空间. 因为任何一个浸入皆 2- 向量，在 G 中的任一浸入皆 2- 上循环. 这里，我们也称 $\mathcal{L}_2$ 的子空间 $\mathrm{Im}\,\delta_1$ 为 Π 的 2–上边缘空间.

定理 5.1.2 若 G 是可平面的，则对任何 $0\neq[a,v]\in\mathcal{L}_1$, $a\in E$, $v\in V$, 在 Π 上有一个浸入 μ 使得 $\psi_\mu=\delta_1([a,v])$.

证 由于 G 是可平面的， G 有一个浸入 μ 是平面嵌入特别是具有条件： $\forall(\alpha,\beta)\in\Omega$, $I_\mu(\alpha,\beta)=0$. 我们往证：对于任何 $[a,v]$, 存在一个浸入 μ_1 使得 $\psi_{\mu_1}=\delta_1([v,a])$. 事实上，在由 μ 所确定的平面多面形上，由 G 的连通性存在一个面的序列 $f_1,f_2,\cdots,f_s$ 使得 f_1 ind v 和 f_s ind a, $s>0$ 并且 f_i 和 f_{i+1} 的边界上至少有一个公共节点. 由此我们总可以求得一条曲线 $P(a)$ 连 a 的两个端点使得

$$P(a)\cap\mu(b)=\begin{cases}0\ (\mathrm{mod}\ 2), & \text{当}b\notin E_v;\\ 1\ (\mathrm{mod}\ 2), & \text{当}b\in E_v\end{cases}$$

如图 5.1.1 所示. 这就使我们可以造出浸入 μ_1 使得

$$\mu_1(b)=\begin{cases}\mu(b), & \text{当}b\neq a;\\ P(a), & \text{当}b=a.\end{cases}$$

容易验证， $\psi_{\mu_1}=[a,E_v]=[a,\delta_0 v]=\delta_1[a,v]$. 从而定理得证. ▮



图 5.1.1

实际上，若 G 是可平面的，则由它的浸入所确定的所有 2- 向量恰与 Π 上的 2- 上边缘空间一致. 然而，若 G 是非可平面的，则对任何 $[a,v]\in\mathcal{L}_1$ 没有一个浸入 μ 使得 $\psi_\mu=\delta_1([a,v])$. 这些将会从下一节的讨论中看到.

§5.2 吴 (文俊)-Tutte 定理

令 $\mathcal{B}_2=\mathrm{Im}\ \delta_1$ 为 $\Pi(G)$ 的 2- 上边缘空间和 $\tilde{\mathcal{H}}_{[2]}=\tilde{\mathcal{H}}_{[2]}(\Pi,GF(2))=\mathrm{Ker}\ \delta_2/\mathrm{Im}\ \delta_1=\mathcal{L}_2/\mathcal{B}_2$ 被称为 $\Pi(G)$ 的 2-上同调空间, 进而，令

$$\Psi=\Psi(G)=\{\psi_\mu|\forall\mu\in I\}. \qquad (5.2.1)$$

在一个浸入 $\mu\in I$ 上定义一个所谓*初等算子*记为 $\pi_{(\gamma,v)}$ 如下：对于 $\gamma\in E$, $v\in V$, $\gamma\ \overline{\mathrm{ind}}\ v$,

$$\pi_{(\gamma,v)}\mu=\begin{cases}\mu(e), & 当\ e\neq\gamma;\\ \varphi(\gamma,v), & 否则.\end{cases} \qquad (5.2.2)$$

其中 $\varphi(\gamma,v)$ 是这样的一段连 γ 的两端点的 Jordan 曲线段使得在闭 Jordan 曲线 $\mu(\gamma)\cup\varphi(\gamma,v)$ 的内部区域只含 v 这一个节点.

自然， $\mu_1=\pi_{(\gamma,v)}\mu\in\mathcal{I}$, 且从 §4. 2 中的 Jordan 定理容易看出

$$I_{\mu_1}(\gamma,a)=\begin{cases}I_\mu(\gamma,a), & 若\ a\notin E_v;\\ I_\mu(\gamma,a)+1, & 若\ a\in E_v.\end{cases}\tag{5.2.3}$$

引理 5.2.1 $\forall\mu_1,\mu_2\in\mathcal{I}(\mu_1\not\sim_{\rm im}\mu_2)$, $\exists(\gamma_i,v_i)(\gamma_i\in E$, $v\in V,\gamma_i\ \overline{\rm ind}\ v_i)$, $1\le i\le s$, $s>1$, 使得

$$\mu_1\sim_{\rm im}\prod_{1\le i\le s}\pi(\gamma_i,v_i)\mu_2.\tag{5.2.4}$$

其中，对任何 $\mu\in\mathcal{I}$,

$$\prod_{1\le i\le s}\pi_{(\gamma_i,v_i)}\mu=\prod_{1\le i\le s-1}\pi_{(\gamma_i,v_i)}(\pi_{(\gamma_s,v_s)}\mu).$$

证 对任何 $a\in E$, 令 $n_{\mu_1,\mu_2}(a)$ 为 Jordan 闭曲线 $\mu_1(a)\cup\mu_2(a)$ 的内部区域中节点的数目. 并且，令

$$n_{\mu_1,\mu_2}=\sum_{a\in E}n_{\mu_1,\mu_2}(a).$$

对 $n=n_{\mu_1,\mu_2}$ 用归纳法. 当 $n=1$ 时，设 $\gamma\in E$ 使得 v 是在 $\mu_1(\gamma)\cup\mu_2(\gamma)$ 内部区域中的那个节点. 则由 (5.2.3) 可知

$$\mu_1\sim_{\rm im}\pi_{(\gamma,v)}\mu_2.$$

一般地，设 $\gamma\in E$ 且在 $\mu_1(\gamma)\cup\mu_2(\gamma)$ 的内部有一个节点 v. 我们可以求得 $\mu_3=\pi_{(\gamma,v)}\mu_2$. 则由 Jordan 定理,

$$n_{\mu_1,\mu_3}(\gamma)=n_{\mu_1,\mu_2}(\gamma)-1.$$

然，对任何 $\beta\ne\gamma$, $\beta\in E$, 均有 $n_{\mu_1,\mu_3}(\beta)=n_{\mu_1,\mu_2}(\beta)$. 从而 $n_{\mu_1,\mu_3}=n-1$. 由归纳假设，存在 $\gamma_i\in E$, $v_i\in V$, $\gamma_i\ \overline{\rm ind}\ v_i$,

$1 \leq i \leq l, l > 1$, 使得

$$\mu_1 \sim_{\text{im}} \prod_{1\leq i\leq l} \pi_{(\gamma_i,v_i)}\mu_3 \sim_{\text{im}} \prod_{1\leq i\leq l} \pi_{(\gamma_i,v_i)}(\pi_{(\gamma,v)}\mu_2)$$

$$= \prod_{1\leq i\leq l+1} \pi_{(\gamma_i,v_i)}\mu_2.$$

其中， $\gamma_{l+1} = \gamma, v_{l+1} = v$. 从而， (5.2.4) 成立. ♮

引理 5.2.2 $\Psi \in \tilde{\mathcal{H}}_{[2]}$

证 首先，我们证对于任何 $\psi_1 = \psi_{\mu_1}$ 和 $\psi_2 = \psi_{\mu_2} \in \Psi$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{L}$, 有 $\psi_1 + \psi_2 \in \mathcal{B}_2$. 事实上，由 (4.2.3) 可知对任何 $[v,\gamma] \in \mathcal{L}_1, v \in V, \gamma \in E, v\ \overline{\text{ind}}\ \gamma$, 有

$$\psi_{\pi_{(\gamma,v)}\mu_2} = \psi_{\mu_2} + \delta_1([v,\gamma]).$$

由引理 5.2.1 可得

$$\mu_1 \sim_{\text{im}} \prod_{1\leq i\leq s} \pi_{(\gamma_i,v_i)}\mu_2.$$

从而，有

$$\psi_1 + \psi_2 = \sum_{1\leq i\leq s} \delta_1([\gamma_i, v_i]) \in \mathcal{B}_2. \tag{5.2.5}$$

然后，我们证对任何 $\psi \in \mathcal{L}_2$ 若存在 $\psi_1 = \Psi$ 使得 $\psi + \psi_1 \in \mathcal{B}_2$ 则 $\psi \in \Psi$. 由于 $\mathcal{B}_2$ 在集合

$$\mathcal{B}_0 = \{\delta_1([\gamma,v]) | \forall [\gamma,v] \in \mathcal{L}_1\}$$

中有一组基. 从 $\psi + \psi_1 \in \mathcal{B}_2$ 可知: 存在 $[\gamma_i, v_i], 1 \leq i \leq k, k > 1$, 使得

$$\psi + \psi_1 = \sum_{i=1}^{k} \delta_1([\gamma_i, v_i]).$$

从而，有

$$\mu \sim_{\mathrm{im}} \prod_{1\le i\le k} \pi_{(\gamma_i v_i)}\mu_1$$

使得 $\psi=\psi_\mu$. 由此，即得 $\psi\in\Psi$. ♮

定理 5.2.1 一个连通图 G 是可平面的，当且仅当 $\Psi=0\in\tilde{\mathcal{H}}_{[2]}$.

证 由 G 的平面性，G 有一个平面嵌入 $\mu\in\mathcal{L}$, $\psi_\mu=0\in\mathcal{B}_2$. 由引理 5.2.2 可知 $\Psi=\mathcal{B}_2$, 即 $\Psi=0\in\tilde{\mathcal{H}}_{[2]}$. 必要性得证. 反之，由 $\Psi=0\in\tilde{\mathcal{H}}_{[2]}$ 可知 $\Psi=\mathcal{B}_2$. 因为 $\psi_\mu=0\in\mathcal{B}_2$, 必有一个平面嵌入 $\mu\in\mathcal{I}$. 这就得到了充分性. ♮

这个定理使得我们可以引进变量

$$x_{b,v}=x_{v,b}\in GF(2). \tag{5.2.6}$$

其中 $b\in E, v\in V$ 是任意的. 对于 G 的任一浸入，我们可以建立模 2 方程组：对任何 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}$,

$$\sum x_{b,v}=I_\mu(\alpha,\beta) \pmod 2. \tag{5.2.7}$$

其中的求和是对于所有的 (b,v) 使得 $b=\alpha$ 和 $\beta\in E_v$, 或 $b=\beta$ 和 $\alpha\in E_v$.

引理 5.2.3 对于图 G, 若存在一个浸入 $\mu_0\in\mathcal{I}$ 使得方程 (5.2.7) 有解，则对任何 $\mu\in\mathcal{I}$ 方程均有解.

证 设对于 μ_0, 方程 (5.2.7) 的解为 $x^{(0)}_{b,v}$, 则

$$\psi_{\mu_0} = \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}} I_{\mu_0}(\alpha,\beta)[\alpha,\beta] = \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}} \Big(\sum_{b\in E, v\in V} x_{b,v}^{(0)}\Big)[\alpha,\beta]$$

$$= \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}} \Big(\sum_{\beta\in E_v} x_{\alpha,v}^{(0)} + \sum_{\alpha\in E_v} x_{\beta,v}^{(0)}\Big)[\alpha,\beta]$$

由 (5.1.7),

$$= \sum_{v\in V} \Big(\sum_{\alpha\in E} x_{\alpha,v}^{(0)}[\alpha,\delta_0 v] + \sum_{\beta\in E} x_{\beta,v}^{(0)}[\delta_0 v,\beta]\Big)$$

由 (5.1.10),

$$= \sum_{v\in V} \Big(\sum_{\alpha\in E} x_{\alpha,v}^{(0)}\delta_1([\alpha,v]) + \sum_{\beta\in E} x_{\beta,v}^{(0)}\delta_1([v,\beta])\Big)$$

$$\in \operatorname{Im}\delta_1 = \mathcal{B}_2.$$

从而，由引理 5.2.2 可知 $\Psi = \mathcal{B}_2$. 也就是说，对于任何 $\mu\in\mathcal{I}$, $\psi_\mu\in\mathcal{B}_2$. 由此，对任何 $\mu\in\mathcal{I}$, 方程 (5.2.7) 均有解. ♮

定理 5.2.2 一个连通图 G 是可平面的，当且仅当对于它的一个浸入 μ 方程 (5.2.7) 有解.

证 由于 G 是可平面的，G 有一个浸入 $\mu_0\in\mathcal{I}$ 是一个平面嵌入. 然，对于平面嵌入 μ_0, $\forall(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}$ 有 $I_{\mu_0}(\alpha,\beta)=0$. 从而，方程 (5.2.7) 有一组解 $x_{b,v}=0$, $b\in E$, $v\in V$. 由引理 5.2.3 可知方程 (5.2.7) 对 μ 也有一个解. 这就得到了必要性. 反之，由引理 5.2.3 可知 $\Psi=\mathcal{B}_2=0\in\tilde{\mathcal{H}}_{[2]}$. 由定理 5.2.1 即得充分性. ♮

虽然，在方程 (5.2.7) 中，方程与变量的数目过多，不过定理 5.2.2 有这样一个很重要的好处使我们可以适当地选择 G 的浸入以便简少变量和方程的数量. 设 T 为图 G 上的一个树.

若 G 的一个浸入 μ 具有下面的性质 Im.3, Im.4 和 Im.5. 则称它为 G 的一个 T-浸入.

Im.3 在 T 上，任何两边均不交叉.

Im.4 任何相邻的两边 (不仅 T 上的) 均不交叉.

Im.5 树 T 上的任何边均不与其它任何边交叉.

由 Jordan 定理，显见，对任一个树 T 在一个连通图上，这样的 T- 浸入总是存在的.

引理 5.2.4 对于图 G 上的一个给定的树 T, 令 T^* 为由 T 所确定的上树，则

$$\{[C_a^*, C_b^*] | \forall a, b \in T\} \cup \{[C_a^*, \alpha] | \forall a \in T, \forall \alpha \in T^*\} \tag{5.2.8}$$

包含空间 $\mathcal{B}_2$ 的一组基.

证 由引理 3.1.1 和 (3.3.1) 知： $\forall a \in T$,

$$\delta_1([v, a]) = \Big[\sum_{e \in E_v \cap T} C_l^*, C_a^* + \sum_{e \in C_a^* \cap T^*} e\Big]. \tag{5.2.9}$$

这样，我们有

$$\delta_1([v, \alpha]) = \sum_{e \in E_v \cap T} [C_l^*, \alpha], \quad \alpha \in T^*;$$

$$\delta_1([v, a]) = \sum_{e \in E_v \cap T} [(C_l^*, C_a^*]$$

$$+ \sum_{e \in E_v \cap T} \sum_{\alpha \in C_a^* \cap T^*} [C_l^*, \alpha], \qquad a \in T.$$

因为 $\mathcal{B}_2$ 有一个基由 $\delta_1([v, a])$, $[v, a] \in \mathcal{L}_1$, 中的一部分组成. 从而，引理成立. ♮

定理 5.2.3 一个连通图 G 是可平面的，当且仅当对于一个 T- 浸入 μ, 方程组

$$\sum_{\substack{a\in C_\alpha, b\in C_\beta \\ (a,b)\in\mathcal{N} \\ a,b\in T}} x_{a,b} + \sum_{\substack{b\in C_\beta \\ (b,\alpha)\in\mathcal{N} \\ b\in T}} x_{b,\alpha} + \sum_{\substack{a\in C_\alpha \\ (a,\beta)\in\mathcal{N} \\ a\in T}} x_{a,\beta} = I_\mu(\alpha,\beta) \tag{5.2.10}$$

对于所有 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}$, $\alpha,\beta\in T^*$ 有一组解.

证 由定理 5.2.1 和引理 5.2.4, G 是可平面的当且仅当对一个浸入 μ, 存在 $x_{a,b}\in GF(2)$ 和 $y_{a,\gamma}\in GD(2)$, $a,b\in T$, $\gamma\in T^*$ 使得

$$\psi_\mu = \sum_{a,b\in T} x_{a,b}[C_a^*, C_b^*] + \sum_{a\in T,\gamma\in T^*} y_{a,\gamma}[C_a^*;\gamma]. \tag{5.2.11}$$

而且，由引理 2.1.3–4 可知： $\forall a,b\in T$, $\forall\alpha,\beta,\gamma\in T^*$,

$$\begin{cases} ([\alpha,\beta],[C_a^*,C_b^*]) = 1 \Leftrightarrow (a\in C_\alpha)\wedge(b\in C_\beta); \\ ([\alpha,\beta],[C_a^*,\gamma]) = 1 \Leftrightarrow (\gamma=\alpha, a\in C_\beta) \\ \qquad\qquad \vee(\gamma=\beta, a\in C_\alpha), \end{cases} \tag{5.2.12}$$

由 (5.2.11) 和 (5.2.12), G 是可平面的当且仅当如下的方程组

$$I_\mu(\alpha,\beta) = \sum_{a\in C_\alpha, b\in C_\beta} x_{a,b} + \sum_{b\in C_\beta} y_{b,\alpha} + \sum_{a\in C_\alpha} y_{a,\beta} \tag{5.2.13}$$

对于所有 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}$ 有解.

因为 μ 是一个 T- 浸入，有

$$\forall(a,b)\in\mathcal{D}(a,b\in T),\quad x_{a,b}=0. \tag{5.2.14}$$

由引理 2.1.3-4 亦知： $\forall(t,\alpha)\in\mathcal{D}(t\in T,\alpha\in T^*)$,

$$([t,\alpha],[C_a^*,C_b^*])=1\Leftrightarrow(t=a,b\in C_\alpha)$$
$$\vee(t=b,a\in C_\alpha)$$

且由此可得

$$y_{t,\alpha}+\sum_{b\in C_\alpha}x_{t,b}=0. \tag{5.2.15}$$

令 $x_{t,\alpha}=y_{t,\alpha}+\sum_{b\in C_\alpha}x_{t,b}$ 为新的变量代替 $y_{t,\alpha}$, $t\in T$, $\alpha\in T^*$, 则

$$\forall(t,\alpha)\in\mathcal{D}(t\in T,\alpha\in T^*),\quad x_{t,\alpha}=0. \tag{5.2.16}$$

将 (5.2.14), (5.2.15) 和 (5.2.16) 代入 (5.2.13), 可得： $\forall\alpha,\beta\in T^*$, $(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}I_\mu(\alpha,\beta)=&\sum_{\substack{a\in C_\alpha,\beta\in C_\beta\\(a,b)\in\mathcal{N}\\a,b\in T}}x_{a,b}+\sum_{\substack{b\in C_\beta\\(b,\alpha)\in\mathcal{N}\\b\in T}}\left(x_{b,\alpha}+\sum_{\substack{a\in C_\alpha\\a\in T}}x_{b,a}\right)\\&+\sum_{\substack{a\in C_\alpha\\(a,\beta)\in\mathcal{N}\\a\in T}}\left(x_{a,\beta}+\sum_{\substack{b\in C_\beta\\b\in T}}x_{a,b}\right)\\=&\sum_{\substack{a\in C_\alpha,b\in C_\beta\\(a,b)\in\mathcal{N}\\a,b\in T}}x_{a,b}+\sum_{\substack{b\in C_\beta\\(b,\alpha)\in\mathcal{N}\\b\in T}}x_{b,\alpha}+\sum_{\substack{a\in C_\beta\\(a,\beta)\in\mathcal{N}\\a\in T}}x_{a,\beta}.\end{aligned}$$

这就是 (5.2.10). 从而，定理得证.

§5.3 平面性辅助图

在这一节中，我们要引进一个给定图 G 的辅助图以判定 G 的平面性.

首先，我们必需减少用以判定图的平面性的方程 (5.2.10) 中变量的数目.

引理 5.3.1 在 (5.2.10) 中每一个方程均有形式：对给定的 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}$, $\alpha,\beta\in T^*$,

$$\sum_{(s,r,t)}(x_{s,t}+s_{sr}+x_{rt})=I_\mu(\alpha,\beta). \tag{5.3.1}$$

证 若在 T 上选择一个节点作为根，所有 T 的边皆可给以定向使得与从根出发沿 T 过此边时所走的方向一致. 与前面相同，C_γ 为 $\gamma\notin T$ 与 T 所成的基本图. 对于 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}$, $\alpha,\beta\notin T$, i.e., $\alpha,\beta\in T^*$, 只需讨论两种情形.

情形 1 $C_\alpha\cap C_\beta=P(u,v)$, 其中 $P(u,v)$ 为 T 上从 u 到 v 的一条路 (不一定是有向的). 这时，方程 (5.2.10) 具有如下之形式：

$$I_\mu(\alpha,\beta)=\sum_u+\sum_v.$$

其中 $\sum_w$, $w=u$ 或 v, 表示在 w 处对 $s,t,r\in(C_\alpha\cup C_\beta)\cap E_w$ 求和并且有

$$\sum_w=\begin{cases} x_{s,t}+x_{s,l}+x_{t,l}, \text{ 当 } r\in C_2\cap C_\beta \\ \qquad\qquad \text{且假定 } r=l; \\ (x_{s,t}+x_{r,s}+x_{r,t})+(x_{s,t}+x_{r,l}+x_{r,s}) \\ \qquad +(x_{t,l}+x_{r,t}+x_{r,l}), \text{ 当} r\notin C_\alpha\cap C_\beta. \end{cases} \tag{5.3.2}$$

其中，r 为 T 上在 w 处指向 w 的边．当然，除根外在 T 上的任一节点均有且只有一条指向它的边．

情形 2　$C_\alpha \cap C_\beta = \{v\}$．这时，方程 (5.2.10) 具有形式：

$$I_\mu(\alpha,\beta) = \sum_v .$$

这里，对于 $s,t \in C_\alpha \cap E_v$，和 $p,q \in C_\beta \cap E_v$，有

$$\sum_v = \begin{cases} (x_{s,p} + x_{s,t} + x_{p,t}) \\ \quad +(x_{s,q} + x_{s,t} + x_{q,t}), \\ \qquad \text{当} r \in C_\alpha \cup C_\beta \text{ 且设 } r = t; \\ (x_{t,p} + x_{t,r} + x_{p,r}) \\ \quad +(x_{t,q} + x_{t,r} + x_{q,r}) \\ \qquad +(x_{s,p} + x_{s,r} + x_{p,r}) \\ \qquad\quad +(x_{s,q} + x_{s,t} + x_{q,r}), \\ \qquad\qquad \text{当 } r \notin C_\alpha \cup C_\beta. \end{cases} \tag{5.3.3}$$

综上所述，引理得证．　□

定理 5.3.1　一个图 G(当然，连通的) 是可平面的，当且仅当对于 G 的一个 T- 浸入方程组

$$\sum_{\substack{t \in C_\alpha,\, s \in C_\beta \\ (s,t) \in N \\ s,t \neq r}} x_{t,s} = I_\mu(\alpha,\beta) \tag{5.3.4}$$

对所有 $(\alpha,\beta) \in D$ 有解．其中 r 为在 T 上指向 v 的边，$r,s,t \in E_v$，

$v \in C_\alpha \cap C_\beta$.

证　根据引理 5.3.1, 允许我们引进变量代换

$$\tilde{x}_{s,t} = x_{r,s} + x_{r,t} + x_{s,t}$$

并且仍用变量 $x_{s,t}$ 代替 $\tilde{x}_{st}$ 即可将方程 (5.3.1) 转变为方程 (5.3.4). 由定理 5.2.3 即得定理. ▯

至此, 也许有人会注意到在方程 (5.3.4) 中无论变量的数目还是方程的数目都比 (5.2.7) 甚至 (5.2.10) 少得多. 然而, 由于 (5.3.4) 中的每一个方程可能会出现六个变量, 但不会更多, 只能用高斯消去法以有效地求解, 这时的计算复杂性为 $O(\nu^6)$, 其中 ν 为图的阶.

若 μ 为 G 的一个 T- 浸入且其中的树 T 为一个确向树, 则称为*确向浸入*. 此后, 凡提及图 G 的一个确向浸入均指图上的所有边已确定了方向. 这就是依 §2.2 中的确向过程所得到的使得所有基本圈皆有向圈.

引理 5.3.2　*设 Tod 是 G 上的一个确向树. 令 C_α 为由上树边 α 与 Tod 所形成的基本圈(更确切地, 有向圈). 则对于 $(\alpha,\beta) \in \mathcal{D}$, $\alpha, \beta \in Tod^*$(自然, Tod^* 为 G 上与 Tod 相应的上树), 在 (5.2.4) 的方程中与 $C_\alpha \cup C_\beta$ 有关的恰有两个变量: 一个是由这样的两个相邻边形成的使得二者中至少有一个是树边且它们全是离开公共端方向; 另一个则是对于端的方向不同且离开的总是树边和进入的总是上树边.*

证　当然, 若 $C_\alpha \cap C_\beta = \emptyset$, 即无公共节点. 这时, 没有变量与 $C_\alpha \cup C_\beta$ 有关.

情形 1　$C_\alpha \cap C_\beta = \{v\}$, $v \in V$. 由于 C_α 和 C_β 皆有向圈, 从 $(\alpha,\beta) \in \mathcal{D}$ 可知 v 不可能为 Tod 的根 (没有树边指向根)

和指向 v 的树边 r 必需在 C_α 或 C_β 上. 由 α 和 β 间的对称性，可以假设 r 在 C_α 而不失一般性. 在 C_α 上与 v 关联的另一条边记为 s(它可以是上树边). 而且，在 C_β 上的与 v 关联的发出的边为 t. 它只能是树边. 这样，我们就只能有二个变量 $x_{s,t}$ 和 $x_{s,\beta}$ 在 (5.2.4) 的与 $C_\alpha \cup C_\beta$ 关联的方程中.

情形 2 $C_\alpha \cap C_\beta = P(u,v)$, 即 G 中从 u 到 v 的一条路. 由引理 2.1.3, $P(u,v)$ 必在 Tod 上. 在 $P(u,v)$ 上与 u 关联的那条树边用 l 表示，其方向为从 u 发出. 因为 C_α 和 C_β 皆有向圈. 在 C_α 和 C_β 上都有一条边指向 u. 由于 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}$ 和 α 与 β 之间的对称性，可以假设 C_α 的那条指向 u 的边为树边. 这样，C_β 上那条指向 u 的边只能是上树边 β. 从而，在 u 处只有一个变量 $x_{l,\beta}$. 相仿地，只能 C_α 和 C_β 各有一边从 v 发出. 记 s,t 分别为 C_α, C_β 在 v 处的这样的边. 则 s 和 t 至少有一条边为树边. 从而，在 v 处也只能有一个变量 $x_{s,t}$. 结果，在 (5.2.4) 的与 $C_\alpha \cup C_\beta$ 关联的方程中只有变量 $x_{s,t}$ 和 $x_{l,\beta}$.

综上所述，即得引理. ▮

根据这个引理, 我们可以称那些相应的二相邻边均为离开公共端的变量为 **树变量**, 常用 $x_{s,t}, (s,t)\in\mathcal{N}$, 表示. 当然，至少 s 和 t 中之一为树边. 那些相应的二邻边在公共端处具有不同方向的变量被称为 **上树变量**. 常用 $y_{l,\gamma}$, $l\in Tod$, $\gamma\in Tod^*$, 表示. 令 $\mathcal{X}_G(T)$ 和 $\mathcal{Y}_G(T^*)$ 分别为 G 上对于一个确向树 Tod 的所有树变量和上树变量的集合. 对于二个变量 $x_{s,t}\in\mathcal{X}_G(T)$ 和 $y_{l,\gamma}\in\mathcal{Y}_G(T^*)$, 若存在一个上树边对 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}$ 使得 $x_{s,t}$ 和 $y_{l,\gamma}$, $\gamma=\alpha$ 或 β, 恰为与 $C_\alpha\cup C_\beta$ 关联的一对由引理 5.3.2 的确定的变量，则称它们为 **合变量**. 并用 $x(T;\alpha,\beta)$ 和 $y(T;\alpha,\beta)$ 表示.

定理 5.3.2 对于 G 的一个 T- 浸入 μ, 方程 (5.3.4) 有

解，当且仅当对于 G 的一个确向浸入 μ_0 方程

$$x(T;\alpha,\beta)+y(T^*;\alpha,\beta)=I_{\mu_0}(\alpha,\beta) \tag{5.3.5}$$

对所有 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{D}$, $\alpha,\beta\in\ Tod^*$, 有解.

证 因为对于一个 T- 浸入，方程 (5.3.4) 有解，由定理 5.3.1 可知方程 (5.3.1) 有解. 则，由定理 5.2.3 有 $\psi_\mu\in\mathcal{B}_2$. 从而，由引理 5.2.2 有 $\Psi=\mathcal{B}_2$. 就是说对于确向浸入 μ_0, 也有 $\psi_{\mu_0}\in\mathcal{B}_2$. 由于对 μ_0, 方程 (5.2.10) 有解，由定理 5.3.1 可得对 μ_0 方程 (5.3.4) 有解. 从而，由引理 5.3.2 得方程 (5.3.4) 有解.

反之，由方程 (5.3.5) 对 μ_0 有解可知 $\psi_{\mu_0}\in\mathcal{B}_2$. 则，用相仿的手续，我们知方程 (5.3.4) 对于 T- 浸入 $\mu\in\Psi$ 有解. ♮

对于 G 的一个给定的确向浸入 μ_0, 可用方程 (5.3.5) 确定一个图，记为 $Aux_0(G)=(V_{ax},E_{ax})$ 或简记 Aux_0 并称它为 G 的 **平面性 0- 辅助图**. 其中，

$$\begin{cases} V^0_{ax}=V^0_{ax}(G)=\{x|\forall x\in\mathcal{X}_G(T)\} \\ \qquad +\{y|\forall y\in\mathcal{Y}_G(T^*)\}; \\ E^0_{au}=E^0_{au}(G)=\{(x,y)|\exists(\alpha,\beta)\in\mathcal{D} \\ \qquad (\alpha,\beta\in Tod^*)\ni(x=x(T;\alpha,\beta) \\ \qquad \wedge y=y(T^*;\alpha,\beta))\}. \end{cases} \tag{5.3.6}$$

而且， $Aux_0(G)$ 的每一条边 e 都有一个权 $w(e)=I_{\mu_0}(\alpha,\beta)\in GF(2)$. $Aux_0(G)$ 的任何一个子图的权定义为子图上所有边的权之和 (mod 2). 若权为 1, 则称之为 **奇权的**; 否则， **偶权的**.

引理 5.3.3　对于一个确向浸入 μ_0, 方程 (5.3.5) 有解当且仅当在 $Aux_0(G)$ 上无奇权圈.

证　利用 §3.1 中所定义的在空间 $\mathcal{G}_1(Aux_0)$ 上的 1- 边缘映象 ∂_1, 方程 (5.3.5) 变为：$\forall e \in E^0_{cx}$,

$$\partial_1 e = w(e). \tag{5.3.7}$$

必要性.　若否，假设 C 是 $Aux_0(G)$ 上的一个奇权圈，即 $\sum_{e\in C} w(e) = 1$. 然，由方程 (5.3.7) 有

$$0 = \sum_{e\in C} \partial_1 e = \sum_{e\in C} w(e) = 1.$$

这就出现了矛盾.

充分性.　因为 $Aux_0(G)$ 上无奇权圈，方程 (5.3.7) 与它的那些由 $e \in T(Aux_0)$ 所确定的方程等价. 其中，$T(Aux_0)$ 为 $Aux_0(G)$ 上的一个树 (通常为森，不失一般性可假定为树). 然而，对于 $T(Aux_0)$, 很容易求得方程 (5.3.7) 的一组解. 事实上，只要选择 $T(Aux_0)$ 上的一节点为根，将与它相应的变量置为 0 或 1, 这个解就是唯一确定的. ▮

定理 5.3.3　对于图 G 的一个确向浸入，方程 (5.3.5) 有解当且仅当对 $Aux_0(G)$ 上的一个树(通常为森，但总可设为树而不失一般性)$T(Aux_0)$, 在 $Aux_0(G)$ 中无奇权的基本圈.

证　令 $C(Aux_0)$ 为 $Aux_0(G)$ 上的循环空间. 容易证明 $C(Aux_0)$ 中的所有偶权的循环形成 $C(Aux_0)$ 的一个子空间，记为 $C_0(Aux_0)$. 而且，它可由偶权圈所生成. 由引理 5.3.3 可知方程 (5.3.5) 有解当且仅当 $C(Aux_0)/C_0(Aux_0) = 0$, 或者说 $C(Aux_0) = C_0(Aux_0)$. 从而，由定理 3.2.1 即得欲证. ▮

§5.4 主要定理

一个图 $G=(V,E)$, 它的边上赋有二元权 w, 即 $GF(2)$ 中的元素. 如果存在对于 V 上的节点的标号 l: "+" 或 "−" 使得对任何 $e=(u,v)\in E$,

$$l(u)\begin{cases}=l(v), & \text{当 } w(e)=0;\\ \neq l(v), & \text{当 } w(e)=1,\end{cases} \tag{5.4.1}$$

则称 G 为平衡的.

引理 5.4.1 对于图 G 的一个确向浸入 μ_0, 其平面性 0–辅助图 $Aux_0(G)$ 是平衡的当且仅当在 $Aux_0(G)$ 中无奇圈.

证 因为 $Aux_0(G)$ 是平衡的, 可知: $\forall z\in V_{au}^0$,

$$z=\begin{cases}1, & \text{当 } l(z)=+;\\ 0, & \text{当 } l(z)=-\end{cases}$$

为方程 (5.3.7), 从而也是方程 (5.3.5) 的一组解. 由引理 5.3.3 即得必要性.

反之, 由引理 5.3.3 知方程 (5.3.5), 从而方程 (5.3.7) 有解. 设 $\forall z\in V_{au}^0$, $z=a$, 是方程 (5.3.7) 的一组解. 则 $\forall z\in V_{au}^0$,

$$l(z)=\begin{cases}+, & \text{当 } a=0;\\ -, & \text{当 } a=1\end{cases} \tag{5.4.2}$$

满足关系 (5.4.1). 也就是说 $Aux_0(G)$ 是平衡的. 充分性得证.

引理 5.4.2 对于 G 的一个确向浸入 μ_0, $Aux_0(G)$ 没有奇权圈当且仅当

$$U_1 = \{e|\forall e \in E^0_{au}, w(e) = 1\}$$

为 $Aux_0(G)$ 的一个 1- 上边缘(当然，也是一个上循环).

证 由引理 5.4.1, V^0_{au} 可划分为两个部分：

$$\begin{cases} V^+_{au} = \{z|\forall z \in V^0_{au}, l(z) = +\}; \\ V^-_{au} = \{z|\forall z \in V^0_{au}, l(z) = -\}. \end{cases}$$

则， $\delta_0 V^+_{au} = \delta_0 V^-_{au} = U_1$. 这就是必要性.

反之，因为 U_1 是 $Aux_0(G)$ 的一个 1- 上边缘，由引理 3.1.1 知任何一个圈都与 U_1 有偶数条边公共. 从而，皆偶权圈. 这就得到了充分性. ♮

定理 5.4.1 下面的说法是等价的:

(1) G 是可平面的;

(2) 对于 G 的一个确向浸入 μ_0, $Aux_0(G)$ 无奇权圈;

(3) 对于 G 的一个确向浸入 μ_0, $Aux_0(G)$ 没有奇权的基本圈;

(4) 对于 G 的一个确向浸入 μ_0, $Aux_0(G)$ 的所有奇权边的集合形成一个 1- 上边缘;

(5) 对于确向浸入 μ_0, $Aux_0(G)$ 是平衡的.

证 由定理 5.3.1-2 和引理 5.3.3 可知 (1) $\Longleftrightarrow$ (2). 由引理 5.3.3 和定理 5.3. 3 可得 (2) $\Longleftrightarrow$ (3). 由引理 5.4.2 可知 (3) $\Longleftrightarrow$ (4). 最后，由引理 5.4.1-2, 有 (4) $\Longleftrightarrow$ (5). ♮

令 $E_1(X,Y)$ 和 $E_2(X)$ 是 $GF(2)$ 上的二个方程组. 设 $\mathcal{E}_1(X,Y)$

和 $\mathcal{E}_2(X)$ 分别为 $\mathcal{E}_1(X,Y)$ 和 $\mathcal{E}_2(X)$ 的所有解的集合. 记

$$\mathcal{E}_1(X,Y)/Y = \bigcup_Y \{X|\forall(X,Y) \in \mathcal{E}_1(X,Y)\}. \qquad (5.4.3)$$

若 $\mathcal{E}_1(X,Y)/Y = \mathcal{E}_2(X)$, 则称 $E_1(X,Y)$ 和 $E_2(X)$ 是共容的.

引理 5.4.3 方程组 $E_1(X,Y;y) = \{x_i + y_i = w_i, i = 1,2,\ldots,n,\ x_j + y = c,$ 对于某个固定的是 $j,\ 1 \le j \le n\}$ 和方程组 $E_2(X,Y) = \{x_i + y_i = w_i, i = 1,2,\ldots,n\}$ 是共容的.

证 由于任何 $(X,Y;y) \in \mathcal{E}_1(X,Y,y)$ 均有 $(X,Y) \in \mathcal{E}_2(X,Y)$, 显见, $\mathcal{E}_1(X,Y;y)/y \subseteq \mathcal{E}_2(X,Y)$. 而且, 对任何 $(X,Y) \in \mathcal{E}_2(X,Y)$, 有 $(X,Y;x_j+c) \in \mathcal{E}_1(X,Y;y)$. 从而, $(X,Y) \in \mathcal{E}_1(X,Y;y)/y$, 故 $\mathcal{E}_2(X,Y)/y \subseteq \mathcal{E}_1(X,Y;y)/y$. ♮

引理 5.4.4 令 $\mathcal{D}_0 = \{(\alpha,\beta) \in \mathcal{D}(\alpha,\beta \in T^*);\ C_\alpha \cap C_\beta = P(u,v), u \neq v\}$. 则, 方程 (5.3.5) 对所有 $(\alpha,\beta) \in \mathcal{D}$ 有解, 当且仅当它对所有 $(\alpha,\beta) \in \mathcal{D}_0$ 有解.

证 因为对任何 $(\alpha,\beta) \in \mathcal{D}$, 所有那些含变量 $y = y(T^*;\alpha,\beta)$ 使得 $C_\alpha \cap C_\beta = \{v\}$ 的方程在 (5.3.5) 中是相同的, 由引理 5.4.3 即得引理. ♮

引理 5.4.5 方程组 $E_1(Y;x) = \{x + y_i = w_i, i = 1,2\ldots,n\}$ 和方程组 $E_2(Y) = \{y_i + y_{i+1} = w_i + w_{i+1}, i = 1,2\ldots,n-1\}$ 是共容的.

证 因为 $E_1(Y;x) = \{y_1 + x = w_1,\ y_i + y_{i+1} = w_i + w_{i+1},\ i = 1,2,\cdots,n-1\}$, 由引理 5.4.3 即得引理. ♮

对于一个树变量 $x_{s,t} \in \mathcal{X}_G(T)$, 令 $y_{\gamma_1} \cdots, y_{\gamma_k}$ 是所有那些上树变量使得在 (5.3. 5) 中与 $x_{s,t}$ 形成合变量 (即, 在一个方程

中). 其中 $\gamma_1 = \gamma_1(x_{s,t}), \cdots \gamma_k = \gamma_k(x_{x,t})$, $k = k(x_{s,t})$ 是依照从根始沿由 §2.2 中的确向过程所确定的出现次序并且若有两个或更多的关联于同一个节点 v, 则在 v 处依旋的次序规定指向 v 的树边为始点所确定的线性序.

引理 5.4.6 对于 G 的一个确向浸入 μ_0, 方程 (5.3.5) 有解当且仅当 $\forall x_{s,t} \in \mathcal{X}_G(T)$,

$$y_{\gamma_i} + y_{\gamma_{i+1}} = w_i + w_{i+1}, \tag{5.4.4}$$

$i = 1, 2, \ldots, k-1$, $k = k(x_{s,t})$, 有解. 其中, w_i, w_{i+1} 分别为 (5.3.5) 中以 $x_{x,t}$ 与 $y_{\gamma_i}, y_{\gamma_{i+1}}$ 为合变量的方程的常数项.

证 利用引理 5.4.5 于每一个树变量, 由树变量的有限性即得引理. ∎

这时, 人们也许会看到在 (5.4.4) 中的每个方程都只含上树变量. 若两个上树变量出现在 (5.4.4) 的某一个方程中, 则称它们是*相邻的*.

令 $(V, \preceq)$ 为在 G 上由一个确向树所定义的偏序集. 当然, 树的根为最小元. 对任一上树边 $\gamma = \langle u, v \rangle$, 令 $h(\gamma) = v$ 和 $t(\gamma) = u$. 它们分别称为 γ 的*首*和*尾*. 自然, 总有 $h(\gamma) \prec t(\gamma)$.

容易看出, 对任何 $u, v \in V$, $u \wedge v = g.l.b.(u, v)$ 是唯一地确定的. 对任何 $\alpha, \beta \in Tod^*$, 令 $\langle \alpha, \beta \rangle = t(\alpha) \wedge t(\beta)$ 和令

$$V_\gamma = \{v | \forall v \in V,\ u_0(\gamma) \preceq v\}. \tag{5.4.5}$$

其中, $u_0(\gamma) = \min\{u | \forall u \in V,\ \langle \alpha, \beta \rangle \prec u \preceq t(\gamma)\}$, $\gamma = \alpha$ 或 β.

给定 G 的一个确向浸入 μ_0. 设在 $v \in V$ 处的旋为 $\varrho_1(v) = (abc \ldots d)$. 其中, a 为那条指向 v 的树边. 然后, 定义 $a \cdot \prec b \cdot \prec c \cdot \prec \cdots \cdot \prec d$. 进而, 在所有上树边的集合上定义一个偏序用 $* \prec$

表示如下: $\forall \alpha, \beta \in Tod^*$,

$$\alpha *\!\prec \beta \Longleftrightarrow \begin{cases} h(\alpha) \prec h(\beta), & 当\ h(\alpha) \neq h(\beta); \\ \alpha \cdot\!\prec \beta, & 当\ h(\alpha) = h(\beta). \end{cases} \tag{5.4.6}$$

令 $\Lambda(\alpha,\beta) = \{\gamma | \forall \gamma \in Tod^*,\ t(\gamma) \in V_\alpha \cup V_\beta,\ h(\gamma) \prec \langle \alpha, \beta \rangle\}$, $\alpha, \beta \in Tod^*$. 对于二上树边 α, β(设 $\alpha * \prec \beta$, 不失一般性), 若

$$\neg\gamma \in \Lambda(\alpha,\beta), \qquad \alpha *\!\prec \gamma *\!\prec \beta$$

则称它们是 *相继的*, 换句话说 α 在 $*\prec$ 之下被 β 覆盖.

引理 5.4.7 对于 G 的一个确向浸入, 二个上树变量 y_α 和 y_β 是相邻的, 当且仅当 α 和 β 是相继的并且出现在如下所定义的类型 A, 类型 B 和类型 C 之一中:

类型 A $\exists \gamma \in Tod^*$,

(i) $h(\gamma) \prec h(\alpha) \prec h(\beta)$;

(ii) $h(\beta) \prec \langle t(\alpha), \Delta \rangle \prec \Delta = \langle t(\gamma), t(\beta) \rangle$.

类型 B $\exists \gamma, \delta \in Tod^*$,

(i) $\max(h(\gamma), h(\delta)) \prec h(\alpha) = h(\beta)$;

(ii) $\langle t(\gamma), t(\alpha) \rangle = \Delta_1 \succ \langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle \prec \Delta_2 = \langle t(\delta), t(\beta) \rangle$.

类型 C $\exists \gamma \in Tod^*$,

(i) $h(\gamma) \prec h(\alpha) \preceq h(\beta)$;

(ii) $h(\beta) \prec \langle t(\gamma), \Delta \rangle \prec \Delta = \langle t(\alpha), t(\beta) \rangle$.

证 由确向树和确向浸入的性质以及导出方程 (5.4.4) 的过程, 通过遍数所有可能情形之讨论, 即可得引理. 其细节留给读者. ♮

一个图 G 的 *左*(或 *右*)*优先浸入* 就是这样的一个确向浸入

使得对任何一个上树边 $\gamma=(u,v)$, 若从 v 沿确向树 Tod 走向 u 时它落在左 (或右) 边. 一个左或右优先浸入也被称为 G 的 标准浸入.

引理 5.4.8 令 $\mathcal{A}(G;Tod^*)$ 为所有对应相邻变量的二上树边对的集合. 则, 对于这个确向浸入方程 (5.4.4) 有解, 当且仅当方程组

$$y_\alpha+y_\beta=\lambda(\alpha,\beta) \tag{5.4,7}$$

对于所有 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}(G:Tod^*)$ 有解. 其中

$$\lambda(\alpha,\beta)=\begin{cases}1, & 若\ \alpha,\beta\ 同在类型\ \mathrm{A},\ 或\ \mathrm{B}\ 中;\\ 0, & 若\ \alpha,\beta\ 用在类型\ \mathrm{C}\ 中.\end{cases} \tag{5.4.8}$$

证 首先, 当确向浸入被标准浸入代替之后, 方程 (5.4.4) 变为方程 (5,4,7). 事实上, 从求方程 (5.4.4) 的过程注意到标准浸入之性质即可得 (5,4,7). 然后, 由于 (5,4,4) 的相容性与确向浸入的选法无关即得引理. □

由引理 5.4.8, 我们又可以造一个图, 用 $Aux_1(G)=(V_{au}^1,E_{au}^1)$ 表示并称之为 G 的一个 平面性 1- 辅助图. 其中,

$$\begin{cases}V_{au}^1=V_{au}^1(G)=\{\gamma|\forall\gamma\in Tod^*,\exists\alpha\in Tod^*,\\ \qquad\qquad(\gamma,\alpha)\in\mathcal{A}(G;Tod^*)\};\\ E_{au}^1=E_{au}^1(G)=\mathcal{A}(G;Tod^*).\end{cases} \tag{5.4.9}$$

令 $\mathcal{A}_0(G;Tod^*)=\{(\alpha,\beta)|\forall(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}(G;Tod^*),\lambda(\alpha,\beta)=0\}$ 和 $\mathcal{A}_1(G;Tod^*)=\mathcal{A}(G;Tod^*)-\mathcal{A}_0(G;Tod^*)=\{(\alpha,\beta)|\ \forall(\alpha,\beta)\in$

$\mathcal{A}(G;Tod^*), \lambda(\alpha,\beta)=1\}$. 则，我们有 $\forall e\in E^1_{av}$,

$$\lambda(e)=\begin{cases}1, & \text{当 } e\in\mathcal{A}_1(G;Tod^*);\\ 0, & \text{当 } e\in\mathcal{A}_0(G;Tod^*)\end{cases} \tag{5.4.10}$$

作为边上的权.

定理 5.4.2 下面的说法是等价的：

(1) G 是可平面的.

(2) $Aux_1(G)$ 没有奇权圈.

(3) $Aux1(G)$ 没有奇权的基本圈.

(4) $\mathcal{A}_1(G;Tod^*)$ 形成 $Aux_1(G)$ 中的一个 1- 上边缘.

(5) $Aux_1(G)$ 是平衡的.

证 与定理 5.4.1 的证明方法相仿. ▯

至此，人们也许注意到了： $Aux_1(G)$ 和 $Aux_0(G)$ 之主要区别在于 $Aux_1(G)$ 的阶的上界为 G 的阶的一个线性函数，而 $Aux_0(G)$ 的则是一个二次函数.

§5.5 注记

5.5.1 关于刻划一个图的平面性，第一篇出版的文章当归功于 Kuratowski, 这是 1930 年的事 [Kur1]. 几年之后， Whitney [Wht6-7] 和接着 MacLane [M1-2] 也以他们各自的方法给出了图的平面性表征. 吴文俊发表他的定理是在 50 年代 [Wu1]. 其等价形式为这里的定理 5.2.1. 不过，他的主要目的在于讨论可剖形在欧氏空间的实现的更一般的问题. Tutte 所提供的与这里的定理 5.2.1 等价的形式是在 70 年代初 [Tut16]. 他所用的实数域上的链群是于 50 年代由他本人引入图论的 [Tut4]. 在

[Liu22] 中，刘彦佩表明他们独立地发现的貌似不同的结果实际上从 $GF(2)$ 上空间的理论来看是同一的. 刘还从布尔方程的角度独立地讨论这个问题 [Liu23–25]. 这些均可视为讨论与此有关课题的不同类型的理论基础.

5.5.2 从 60 年代初，Auslander 和 Parter 发表他们的有关嵌入图到球面上的算法思想起，出现了一大批有关算法的文章 [Go1, Fis1, FiW1, DMP1, We7, Li1, Ht1–2, Da1, Mo1, HoT1, HoT5, Deo1, 等]. 特别是 Hopcroft 和 Tarjan 给出了一个线性时的算法 [HoT5]. Deo [Deo1] 改正了 [HoT5] 中的一些错误. 在这方面的大多数文章是基于一步一步地嵌入圈到平面上. 在 [Tut8] 中，Tutte 则用完全不同的想法通过解一组线性方程同时确定平面嵌入的各节点在平面上的坐标. 吴文俊进一步发展他本人的理论结果到通过解模 2 方程组在计算机上实现 [Wu2, Wu4]. 这里的定理 5.2.2 和定理 5.3.1 反映了他的想法的实质.

5.5.3 将平面性的问题转化为判定一个图是否有奇权圈，或一个边的子集是否为一个 1- 上边缘，或一个图是否是平衡的想法可从 [Liu1–2], [Liu19], [Liu22] 以及其后在 [FR1–2] 和 [Ro3] 中看到.

5.5.4 基于定理 5.4.1, 一个 $O(n^2)$, n 为图的阶，的算法可以容易地发现 [Liu1]. 然，实地计算的结果表明对特别是一万个节点以内的图比 Hoproft 和 Tarjan 的线性算法更为有效 [Sun1], [Xu1]. 在 [Xu1] 中，通过数据结构上的改进提供了一个 $O(n\log n)$ 的算法.

5.5.5 虽然定理 5.4.2 表明 $Aux_1(G)$ 的阶不超过图 G 阶的一个线性函数，$Aux_1(G)$ 的度仍是 G 的阶的二次函数，在第七章中，将会解释如何使得达到计算复杂性的线性性. 原始

的讨论可在 [Liu19,22-25] 中查到.

5.5.6 在 §5.3–4 中所讨论的辅助图依赖确向树的选择. 然而, 如何刻划一个图的辅助图仍是一个公开的问题 [Liu23].

5.5.7 事实上, 定理 5.4.2 并不依赖浸入的选择. 因为常数 $\lambda(\alpha,\beta)$ 不再由浸入所决定. 虽然平面性 1- 辅助图仍依赖由确向树所决定的偏序, 在定理 5.4.2 中, 图的平面性同样不依赖如何选择确向树.

第六章

高斯交叉问题

§6.1 交叉序列

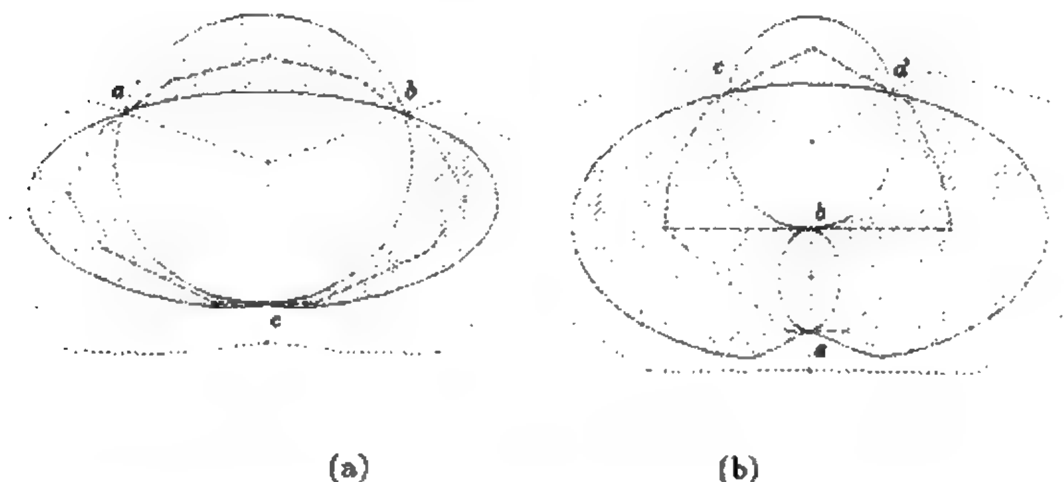
对于一个 Jordan 闭曲线，或者说一个圈 C, 令 f 是一个从 C 到平面上的连续函数使得有有限个自交叉点，更确切地，简单交叉点. 所谓 *简单交叉* 是指这样的交叉点 $r \in f(C)$, 它不是切点而且恰有 $p, q \in C$ 使得 $f(p) = f(q)$. 后者也称为 *二重交叉*. 若 $f(C)$ 的所有自交叉点用互不相同的字母表示： $a, b, c, \cdots$, 则从 $Z = f(C)$ 上的一点 p 出发沿着 C 所确定的方向返回到 p 并将所经过的交叉点的代表字母依次记录下来，这样就得到一个字母的序列. 我们称之为 Z 的 *交叉序列*. 当然，它是循环序的. 由于二重交叉性，在此序列上每一个字母恰出现二次. 称具有这种性质的字母的循环序列为 *多面形的*.

在图 6.1.1(a) 中，这个曲线有三个交叉点，其交叉序列为 $abcabc$. 在图 6.1.1(b) 中，有四个交叉点，其序列为 $abcdbadc$. 它们全是偶长的，即其上字母的出现次数为偶. 一个序列，若存在平面上的一个闭曲线 Z 使得它为 Z 的交叉序列，则它本身也称为 *交叉序列*. 当然，任何交叉序列均是多面形的. *高斯交叉问题* 就是要确定一个序列是否为一个交叉序列. 换句话说，

给出交叉序列的表征. 令 Seq 为一个字母的序列. $\Xi = \Xi(Seq)$ 为其上字母的集合. 若 Seq 具有形式:

$$Seq = AaBbCaDb, \tag{6.1.1}$$

则称 a 和 b 是 交叉的. 记为 a int b.



(a) (b)

图 6.1.1

所谓一个序列 Seq 的 交叉图 指这样的一个图, 用 $G(I) = G(Int) = (V(Int), E(Int))$ 表示, 使得

$$V(Int) = \Xi; \qquad E(Int) = Int. \tag{6.1.2}$$

其中, $Int = \{(a,b)|\forall a, b \in \Xi, a \text{ int } b\}$.

也许人们已经看到, 在图 6.1.1 中, (a) 所示的曲线的交叉序列的交叉图为三角形而 (b) 则是一个四边形. 这两个图均为 Euler 的. 也易看出, 在 $G(Int)$ 中既无环也无重边. 但, 孤立节点是允许的. 与 §3.4 中一样, 对于 $a \in V(Int)$, 令

$$Int\ a = \{b|\forall b \in V(Int), (a,b) \in E(Int)\}.$$

引理 6.1.1 对于任何一个交叉序列 Seq, 它的交叉图

$G(Int)$ 均为 Euler 图.

证 对于 $a \in \Xi$, 设交叉序列 Seq 具有形式 $Seq = AaBa$. 则, 对任何 $b \in \Xi(b \neq a)$, $(a,b) \in E(Int)$ 当且仅当 b 不但在 A 中而且在 B 中出现. 由 Seq 的简单交叉性, 在 aAa 上与 A 邻近的指向 a 和离开 a 的点皆同时落在闭曲线 aBa 的内部或外部之一个区域中, 由 Jordan 定理, 在 A 和 B 中所出现的交叉点的数目必为偶. 从而, $|\text{Int } a| = 0 \pmod 2$. 由定理 1.3.6 即得引理.

引理 6.1.2 对于交叉序列 $Seq, \forall a, b \in \Xi\ ((a,b) \notin E(Int))$,

$$|\text{Int } a \cap \text{Int } b| = 0 \pmod 2.$$

证 由于 $(a,b) \notin E(Int)$, Seq 具有形式 $Seq = AaBbCbDa$, 因此, $c \in \text{Int } a \cap \text{Int } b$ 当且仅当 c 为在 A 和 C 中皆出现的 aAa 与 bBb 的交叉点. 与引理 6.1.1 的证明中同样地, 因为在 a 的邻域中 aAa 上的点不是在 bBb 的内部就是在外部之同一个区域中. 由 Jordan 定理即得 $|\text{Int } a \cap \text{Int } b| = 0 \pmod 2$, 引理得证.

若 Seq 是曲线 Z 的交叉序列, 则, 我们可以得一个图, 它的节点就是 Z 上的交叉点. 边就是 Z 上连二交叉点而不与其它交叉点相遇的曲线段. 由简单交叉性, 这个图必为 4- 正则的平面图. 记之为 $G(Z)$. 由定理 1.3.7 知 $G(Z)$ 的对偶 (当然, 平面的) 是二部的. 这就是说, $G(Z)$ 的面可以划分为二个部分使得在每部分中任何两个面的边界至多有一个公共点. 当然, 在每一个节点处的四个关联面也分为二部分, 且每部分中的二面为对顶的. 对顶的两面亦称为 *相反的*. 对每一部分面的集合, 我们还可引进一个图使得它的节点为此部分中之面和两

节点相邻当且仅当它们的相应面是相反的. 容易证明, 由此二部分面所得的二图互为平面对偶.

令 $G_S(Z)$ 是此二图中那个不含无限面的. 当然, 另一个即它的平面对偶 $G_s^*(Z)$. 称它们为交叉序列的关联图. 在图 6.1.1 中, $G_S(Z)$ 和 $G_S^*(Z)$ 分别用虚段线和虚点线表示.

引理 6.1.3　对于一个交叉序列 Seq, 两图 $G_S^*(Z)$ 和 $G_S(Z)$ 皆无双循环.

证　因为 $G_S(Z)$ 和 $G_S^*(Z)$ 皆平面的和 Seq 是在它俩上由 §3.4 中的通穿规则唯一确定的一个迂, 由定理 3.4.6 即得引理. ▯

引理 6.1.4　对于一个交叉序列 Seq, 令

$$U(Int) = \{(a,b)|\forall(a,b) \in E(Int),$$

$$|\mathrm{Int}\ a \cap \mathrm{Int}\ b| = 0\ (\mathrm{mod}\ 2)\}.$$

则, $U(Int) \in C^{\perp}(Int)$, 即 $G(I)$ 的一个 1- 上边缘或者说上循环.

证　由引理 6.1.3 知 $G_S(Z)$ 无双循环, 即 (3.4.3) 中的 $O = \emptyset$. 这样, 我们有

$$E(G_S(Z)) = \Xi = M + N. \tag{6.1.3}$$

其中, $e \in M$ 或 N 分别由 $e \in \gamma(e)$ 或 $w(e)$ 所决定. 由定理 3.3.6 知 $\{\gamma(e)|\forall e \in \Xi\}$ 和 $\{w(e)|\forall e \in \Xi\}$ 分别生成 $G_s(Z)$ 的循环空间 $C(G_s(z))$ 和上循环空间 $C^{\perp}(G_s(Z))$. 由 (3.4.8) 可知 Int $a = \gamma(a) \cap w(a)$. 则, 有

$$\gamma(a) = \begin{cases} \mathrm{Int}\ a \cup \{a\}, & 若\ e \in M; \\ \mathrm{Int}\ a, & 若\ e \in N, \end{cases} \tag{6.1.4}$$

和

$$\omega(a)=\begin{cases}\text{Int } a\cup\{a\}, & \text{若 } e\in N\\ \text{Int } a, & \text{若 } e\in M.\end{cases}\tag{6.1.5}$$

因为对于 $(a,b)\in E(Int)$, 即 $b\in Int\ a$, 我们有

$$|\text{Int } a\cap(\text{Int } b\cup\{b\})|=|\text{Int } a\cap\text{Int } b|+1 \pmod 2.$$

由 (6.1.4) 和 (6.1.5),

$$|\text{Int } a\cap\text{Int } b|=\begin{cases}(\gamma(a),\omega(b)) \pmod{2} \Longleftrightarrow a\in N, b\in M;\\ (\omega(a),\gamma(b)) \pmod{2} \Longleftrightarrow a\in M, b\in N.\end{cases}$$

由空间 $C(G_s(Z))$ 和 $C^{\perp}(G_s(Z))$ 的正交性,

$$\begin{aligned}&|\text{Int } a\cap\text{Int } b|=0 \pmod 2\\ &\qquad\Longleftrightarrow a\in M, b\notin M \text{或 } a\in N, b\notin N.\end{aligned}$$

这就意味 $U(Int)$ 是 $G(I)$ 的一个 1- 上边缘. □

事实上, 引理 6.1.1-2 也可以直接由 $G_S(I)$ 导出. 因为 $G_S(I)$ 无双循环, 由 (3.4.9) 即得引理 6.1.1. 又, 对任何 $(a,b)\notin E(Int)$, 即 $b\notin$ Int a 和 $a\notin$ Int b, 有

$$\begin{aligned}\text{Int } b\cap(\text{Int } a\cup\{a\})&=\text{Int } a\cap(\text{Int } b\cup\{b\})\\ &=\text{Int } a\cap\text{Int } b.\end{aligned}$$

然而，由 (6.1.4-5), 可得

$$(\gamma(a),\omega(b)) = \begin{cases} |\text{Int } a \cap (\text{Int } b \cup \{b\})| \pmod 2, \\ \qquad \text{当} a \in N, b \in N; \\ |(\text{Int } a \cup \{a\}) \cap \text{Int } b| \pmod 2, \\ \qquad \text{当} a \in M, b \in M. \end{cases}$$

从而，

$$|\text{Int } a \cap \text{Int } b| = \begin{cases} (\gamma(a),\omega(b)) \pmod 2, \text{ 当} a \in N, b \in M; \\ (\gamma(b),\omega(a)) \pmod 2, \text{ 当} a \in M, b \in N. \end{cases}$$

由 $C(G_s(Z))$ 和 $C^+(G_s(z))$ 的正交性，即得引理 6.1.2.

进而，我们将在 §6.3 中论证由引理 6.1.1-2 和引理 6.1.4 所描述的条件对于一个多面形的序列为交叉序列也是充分的. 这就给出了高斯猜想的一个回答.

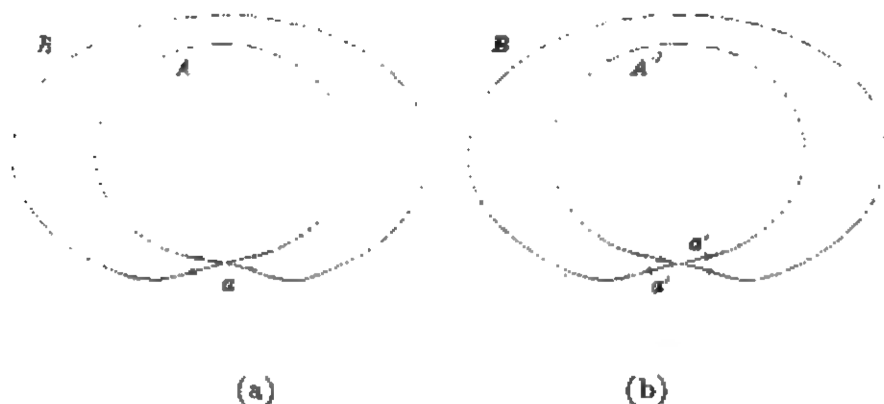
§6.2 Dehn 定理

令 Seq 是字母的一个循环序列. 对于一个交叉点 $a \in \Xi$, 即 Seq 中出现的字母的集合, 将 $Seq = aAaB$ 变为 $Seq' = a'A^{-1}a'B$ 的运算被称为 *劈分字母*a, 用 λ_a 表示. 当然，若 Seq 是一个闭曲线 Z 的交叉序列，则劈分一个字母就是劈分一个交叉点 a 使所得的曲线 Z' 仍为一个闭曲线. 这时 Seq' 就是 Z' 的交叉序列带有字母 a' 的两次出现. 由于 a' 不再是闭曲线 Z' 的交叉点可以想象 a' 就是 Z' 上两个点的标记. 图 6.2.1 显示了这个运算. 这样， $Seq' = \lambda_a(Seq)$ 被称为曲线 Z' 的 *标定交叉序列*, 或称为 *标定序列*, 当 Seq 不是一个闭曲线的交叉序列时. 由于

一般地 $\lambda_a\lambda_b \neq \lambda_b\lambda_a$ 对于 Ξ 中字母的一个给定的线性序，令

$$\widetilde{Seq} = \prod_{a\in\Xi} \lambda_a(Seq). \tag{6.2.1}$$

并称 $\widetilde{Seq}$ 是 Seq 的一个 *劈分序列*. 自然，$\widetilde{Seq}$ 是一个标定序列且其中所有字母均带标记.



(a)　(b)

图 6.2.1

若一个图，它的节点为 $\widetilde{Seq}$ 上所有带标记的字母且每个出现两次和二节点相邻当且仅当它们是相同的字母或者它们在 $\widetilde{Seq}$ 上相继，则称之为序列 Seq(当然，多面形的) 的 *劈分图*. 并记它为 $\tilde{G}(Seq)$. 相应 $\widetilde{Seq}$ 的闭曲线 $\tilde{Z}$, 自然与圆拓扑等价，被称为 Z 的 *劈分曲线*. 其中，Z 以 Seq 为交叉序列.

引理 6.2.1　*对于任一多面形的序列 Seq, 所有劈分图 $\tilde{G}(Seq)$ 皆立方的 (即 3- 正则). 若 Seq 是一个交叉序列，则对于 Ξ 上的任何一个线性序，劈分图 $\tilde{G}(Seq)$ 皆平面的.*

证　因为在 $\tilde{G}(Seq)$ 上，每一个节点都与三条边关联：一为与它同字母的节点，一个为与 Seq 的前继，和第三个为与它在 Seq 上的后继所连之边，引理的前一个说法显然.

事实上，$\widetilde{Seq}$ 为任何一个不自交叉的 Jordan 闭曲线 $\tilde{Z}$ 的交叉序列. 沿 $\tilde{Z}$ 依 $\widetilde{Seq}$ 上之次序给出带标记的点. 由于 $\tilde{G}(Seq)$

总可视为在劈分曲线 Z 的交叉点时将劈得的二个同字母的点用一条直线段连接使得无内点与 Z' 公共所最终得到的图. 由于这一运算是在平面上进行的, 故 $\tilde{G}(Seq)$ 为平面的. 这就得到了后一个说法. ♮

对于一个曲线 Z 的交叉序列的劈分图 $\tilde{G}(Seq)$, 劈分曲线 $\tilde{Z}$ 相应 $\tilde{G}(Seq)$ 的一个 Hamilton 圈. 由于 $\tilde{G}(Seq)$ 是平面的 (引理 6.2.1), 所有不在 $\tilde{Z}$ 上的边可以分为两类 (由 Jordan 定理): 一类是由所有落在 $\tilde{Z}$ 内部区域的边组成, 称为 *内的*; 另一类则是 *外的* 由所有在 $\tilde{Z}$ 外部区域的边组成. 由所有内边端点所组成的 $\widetilde{Seq}$ 的子序列 (循环的) 称 $\widetilde{Seq}$ 的 *内序列*. 相仿地可知 *外序列* 的意义. 当然, 不管内还是外序列均是多面形的. 一个多面形的序列, 若其中没有交叉的字母, 则称之为 ***Dyck*字**.

引理 6.2.2 *一个交叉序列 Seq 的任何劈分图 $\tilde{G}(Seq)$ 的内和外序列皆 Dyck 字.*

证 直接由上述讨论得到. ♮

现在, 我们可以讨论劈字母运算的逆. 首先, 在 $\tilde{G}(Seq)$ 上去掉不在 $\tilde{Z}$ 上的边而用充分接近的平行线段代替. 然后, 在每一条边的端点处去掉二平行线间的部分. 最后, 在每一边相应的平行线段之中点处合而为一并记为代表这边端点的字母但不带撇为图 6.2.2 所示.

设对于所有不在 $\tilde{Z}$ 上的边均作了上述的运算. 如果所得到的是一条闭曲线并且它的交叉序列就是 Seq, 则称 $\tilde{G}(Seq)$ 为 *可迹的*.

引理 6.2.3 *若 $\tilde{G}(Seq)$ 是一个交叉序列 Seq 的劈分图, 则 $\tilde{G}(Seq)$ 是可迹的.*

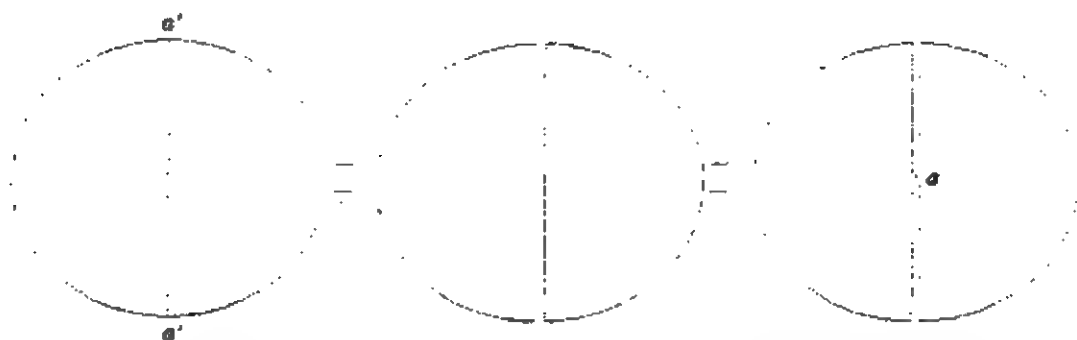


图 6.2.2

证 根据上述由 $\tilde{G}(Seq)$ 产生交叉点的过程，对不在 $\tilde{Z}$ 上的所有边处置之后恰得一闭曲线 Z，其交叉序列为 Seq. 因此，$\tilde{G}(Seq)$ 是可迹的. ▯

对于任何一个序列，只要它是多面形的，不一定是交叉序列，均可得到劈分序列和劈分图. 不过，因为它们依赖在 Ξ 上线性序的选择，故不是唯一的. 然而，不管怎样选择 Ξ 上的线性序，只要有一个劈分序列可以划分为两个 Dyck 字并进而相应的劈分图是可迹的，则任何劈分序列和相应的劈分图都有这些性质.

定理 6.2.1 *一个多面形的序列 Seq 是一个交叉序列当且仅当它的劈分序列 $\widetilde{Seq}$ 可以划分为两个 Dyck 字并且其劈分图是可迹的.*

证 由于必要性可直接由引理 6.2.1-3 得到，我们只证充分性. 因为 $\widetilde{Seq}$ 可划分为二个 Dyck 字，$\tilde{G}(Seq)$ 可以嵌入到平面上使得一个 Dyck 字确定所有那些在曲线 $\tilde{Z}$ 内部的边和另一个确定所有 $\tilde{Z}$ 外部的边. $C = \tilde{Z}$ 为 $\tilde{G}(Seq)$ 上的那个 Hamilton 圈. 进而，由于 $\tilde{G}(Seq)$ 是可迹的，则通过在 $\tilde{G}(Seq)$ 上作劈分

之逆的过程 (如上所述) 所得的曲线 Z 就以 Seq 为交叉序列.

▯

引理 6.2.4　对于一个多面形的序列 Seq, 其劈分序列 $\widetilde{Seq}$ 的交叉图 $\tilde{G}(I)$ 是二部的当且仅当 $\widetilde{Seq}$ 可划分为二个 Dyck 字.

证　若 $\tilde{G}(I)$ 是二部的, 则它的节点集 $\tilde{V}(Int)=\tilde{V}_1+\tilde{V}_2$. 就是说在 $\tilde{V}_1$(或 $\tilde{V}_2$) 中的任何一对节点在 $\widetilde{Seq}$ 上均是不交叉的. 这样, $\widetilde{Seq}$ 被划分为二个子序列, 一个由 $\tilde{V}_1$ 的所有字母组成; 另一个由 $\tilde{V}_2$ 中所有字母组成. 从而, 它们确定了二个 Dyck 字划分 $\widetilde{Seq}$. 必要性得证.

反之, $\widetilde{Seq}$ 的二个 Dyck 字确定了 $\tilde{V}(Int)$ 被划分为二个部分. 它们分别由这两个 Dyck 字中的字母组成. 这就得到了充分性.　▯

定理 6.2.2　一个多面形的序列 Seq 是一个交叉序列, 当且仅当其劈分序列的交叉图 $\tilde{G}(I)$ 是二部的而且劈分图 $\tilde{G}(Seq)$ 是可迹的.

证　由引理 6.2.4 和定理 6.2.1 即得定理.　▯

对于一个多面形的序列 Seq, 若它的劈分图 $\tilde{G}(Seq)$ 是平面的, 令 $\tilde{Z}$ 为那个与劈分序列 $\tilde{Seq}$ 相应的 Hamilton 圈. $F_{in}(Seq)$ 和 $F_{out}(Seq)$ 分别为 $\tilde{Z}$ 的内部和外部所有面的集合. $E_{in}(Seq)$(或 $E_{out}(Seq)$) 为 $\tilde{Z}$ 的内部 (或外部) 的所有边的集合. 则, 我们可以造一个新图, 称之为 Seq 的 P–C 图并用 $\tilde{G}_{pc}(Seq)=(V_{pc},E_{pc})$ 表示. 其中,

$$\begin{cases} V_{pc}=\{f|f\in F_{in}(Seq)\}; \\ E_{pc}=E_{pc}^{(1)}+E_{pc}^{(2)} \end{cases} \tag{6.2.2}$$

和

$$\begin{cases} E_{pc}^{(1)} = \{(f_1, f_2) | \forall f_1, f_2 \in V_{pc}, f_1 \text{ adj } f_2\}; \\ E_{pc}^{(2)} = \{(f_1, f_2) | \exists (u, v) \in E_{out}(Seq), V \\ \qquad (u \text{ ind } f_1) \wedge (v \text{ ind } f_2)\}. \end{cases}$$

因为 $\tilde{G_{pc}}(Seq)$ 可嵌入到平面上使得 $f \in V_{pc}$ 是面 $f \in F_{in}(Seq)$ 内的一个点，$(f_1, f_2) \in E_{pc}^{(1)}$ 是一条与 f_1 和 f_2 的公共边界交叉的曲线，和 $(f_1, f_2) \in E_{pc}^{(2)}$ 为通过 $E_{out}(Seq)$ 中那条端点在 f_1 和 f_2 边界上的边. 分别称 $E_{pc}^{(1)}$ 和 $E_{pc}^{(2)}$ 为 E_{pc} 的 交叉 和 通过 子集. 而且，由定理 3.4.6, 我们也可造另一个图，称为 Seq 的 C–P图 并用 $\tilde{G}_{cp}(Seq)$ 表示. 它可由 (4.2.2) 中将 $F_{in}(Seq)$ 和 $E_{out}(Seq)$ 分别用 $F_{out}(Seq)$ 和 $E_{in}(Seq)$ 代替而得到. 容易验证，$\tilde{G}_{cp}(Seq) = \tilde{G}_{pc}^*(Seq)$, 即 $\tilde{G}_{pc}(Seq)$ 的平面对偶和若 Seq 是一个交叉序列，则

$$\begin{cases} \tilde{G}_{pc} \ (\text{或 } \tilde{G}_{cp})(S_{eq}) = G_S; \\ \tilde{G}_{cp} \ (\text{或 } \tilde{G}_{pc})(Seq) = G_S^*. \end{cases} \tag{6.2.3}$$

若用 §3.4 中的通穿规则对 $\tilde{G}_{pc}(Seq)$ 所得的迁的集合 TTr 仅含单一个迁，并且次序与 Seq 一致，则称 $\tilde{G}_{pc}(Seq)$ 为 $T.T.$可迹的 或 通穿可迹的. 当然，由定理 3.4.6 可知，可迹性意味在 $\tilde{G}_{pc}(Seq)$(同样地，$\tilde{G}_{cp}(Seq)$) 上无双循环.

引理 6.2.5 对于一个多面形的序列 Seq 的一个平面的劈分图 $\tilde{G}(Seq)$(如果存在的话), $\tilde{G}(Seq)$ 是可迹的当且仅当 $\tilde{G}_{pc}(Seq)$ 是通穿可迹的.

证 由于用 §3.4 中的通穿规则在 $\tilde{G}(Seq)$ 上所得的单一个迁就是在 $\tilde{G}(Seq)$ 上依劈分之逆过程产生所有交叉点所得的

那条闭曲线，故充分性成立. 反之，上述产生所有交叉点的那条闭曲线恰为由通穿规则在 $\tilde{G}(Seq)$ 上所得的那个迂. 从而，必要性成立. ♮

引理 6.2.6 *对于一个多面形的序列，一个劈分图 $\tilde{G}(Seq)$ 是可平面的当且仅当其劈分序列 $\widetilde{Seq}$ 可以划分为两个 Dyck 字.*

证 由引理 6.2.1 知 $\tilde{G}(Seq)$ 是立方的. 因为 $\tilde{G}(Seq)$ 是平面的，不在 Hamilton 圈 $\tilde{Z}$ 上的边可划分为二部分：一部分由所有那些在 $\tilde{Z}$ 内部的边组成，而另一部分则是由所有外部的边组成. 由 3- 正则性 (即立方性)，这些边的任何二条均不相邻. 从而，在每部分中，边的端点的代表字母形成一个 Dyck 字. 这就得到了必要性.

反之，将一个 Dyck 字关联的边放入在闭曲线 $\tilde{Z}$ 的内部或外部，即可得 $\tilde{G}(Seq)$ 的一个平面嵌入. 从而，它是可平面的. 充分性得证. ♮

定理 6.2.3 *一个多面形的序列 Seq 是一个交叉序列，当且仅当它的劈分图是可平面的并且其 P-C 图 $\tilde{G}_{pc}(Seq)$ 是通穿可迹的.*

证 由引理 6.2.5-6 和定理 6.2.1 即得定理. ♮

§6.3 高斯猜想

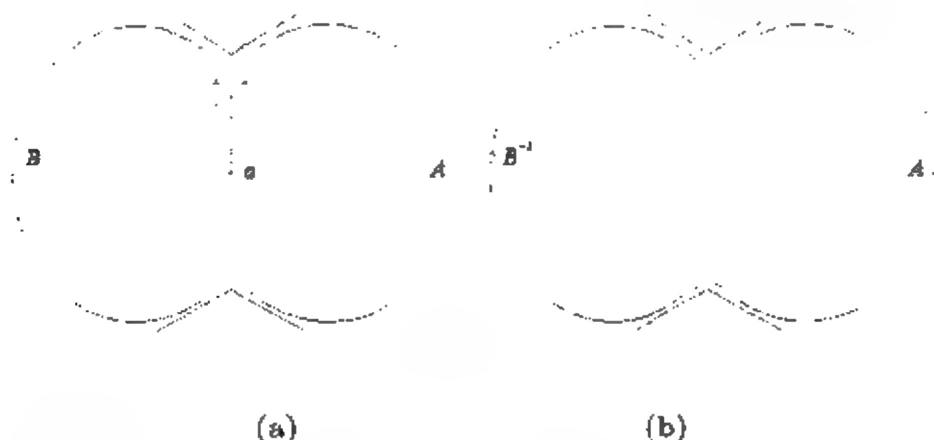
一个单面的多面形 Σ，对于每个字母 a，若在 Σ 上的二次出现具有相同的幂则在此二出现之间所有仅出现一次的字母代表的边形成一个主循环 $\gamma(a)$，$(a, \gamma(a)) = 1$，和若它的二次出现具有不同的幂，则此二出现之间所有出现一次的字母代表的边形成一个主上循环 $\omega(a)$，$(\omega(a), a) = 1$. 则称 Σ 为*奇异的*. 如果一个多面形的序列 Seq 的字母可以划分为二部分：M 和 N

使得在 M 中的每个字母的二次出现的幂相同和 N 中的字母的二次出现的幂不同得到一个奇异的多面形，则也称 Seq 是奇异的.

引理 6.3.1 一个无双循环的图 G 是可平面的，当且仅当它有在曲面上的单面嵌入为奇异的.

证 因为 G 是平面的并且无双循环，由定理 3.4.6 可知用通穿规则在 G 上只得一个迂 q. 由 §3.4 中所讨论的，易验证 q 是一个奇异的多面形. 从而，必要性成立.

反之，设 Sin 为由 G 的那个奇异多面形所确定的奇异序列. 令 Σ 为 G 在曲面上的这样一个嵌入使得在每个节点处的旋与用 §3.4 中的通穿规则得到的那个迂所确定的一致. 下面证明 Σ 是一个多面形 (当然，可定向的), 具有 $\varepsilon-\nu+2$ 个面而且它们全是依 §2.1 中的旅行规则所得到的. 对 G 的度 ε 行归纳法. 当 ε 较小时，易验证. 一般地，分二种情形讨论.



(a) (b)

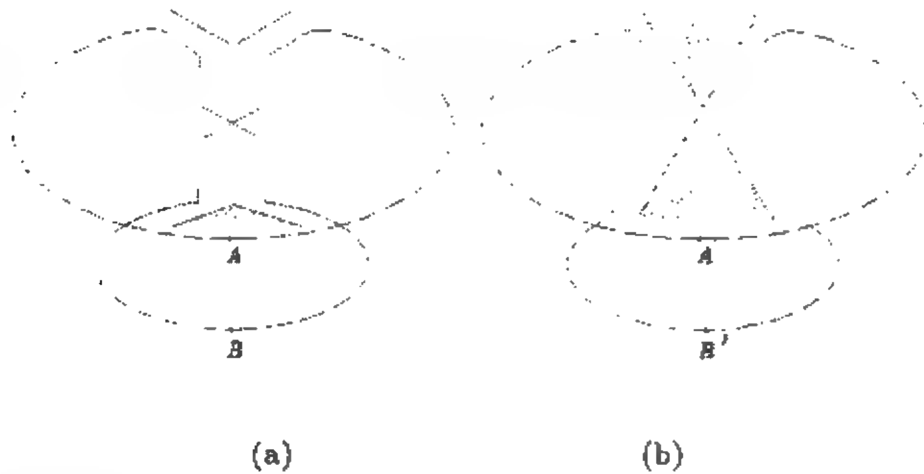
图 6.3.1

情形 1 $\exists a\in M$, $\gamma(a)=\mathrm{Int}\,a$, $(a,\gamma(a))=1$. 令 $G'=G-a$. 设 $Sin=aAaB$, 则 $Sin'=AB^{-1}$ 恰为对于 G' 的那个奇异序列, 如图 6.3.1 所示. 因为 G 没有双循环，由引理 3.4.2 知 G' 也没有

双循环. 用归纳假设, 令 Σ' 是一个具有 $(\varepsilon-1)-\nu+2=\varepsilon-\nu+1$ 个面的可定向多面形. 由于 Σ' 的旋为 Σ 的旋所限定在 Σ' 上的, 则 a 的二个端点在同一面边界上. 不妨假设, 此面之形式为 (CD). 这样就有

$$\Sigma=\Sigma'-\{CD\}+\{C_a,a^{-1}D\} \tag{6.3.1}$$

为 G 的一个有 $\varepsilon-\nu-2$ 个面的可定向多面形.



(a) (b)

图 6.3.2

情形 2 $\exists a\in N, \omega(a)=\text{Int }a, (a,\omega(a))=1$. 令 $G''=G\cdot a$ 为在 G 上收缩 a 所得的图. 设 $Sin=aAa^{-1}B$. 因为 G 无双循环. 则由引理 3.4.2 知 G'' 也没有双循环. 而且, 也易看出 $Sin''=AB^{-1}$(如图 6.3.2 所示) 为对于 G'' 的那个奇异多面形. 由归纳假设, G'' 是一个具有 $(\varepsilon-1)-(\nu-1)+2=\varepsilon-\nu+2$ 面的可定向多面形 Σ'' 的基准图. 令

$$\Sigma''=(\Sigma\langle a\rangle,C,D). \tag{6.3.2}$$

其中, C 和 D 与那个收缩 a 得到的节点关联的二个面. 由与情形 1 相仿的理由, 有

$$\Sigma = (\Sigma(a), Ca, a^{-1}D) \tag{6.3.3}$$

就是 G 的具有 $\varepsilon - \nu + 2$ 个面的可定向多面形.

从而，由推论 3.2.1 可知 G 是可平面的. 这就得到了充分性. ⊡

引理 6.3.2 一个多面形的序列 Seq 是一个交叉序列，当且仅当它是奇异的.

证 由引理 6.1.3 知 G_S 没有双循环. 进而，由引理 3.4.3 知交叉序列 Seq 上的字母可划分为二类： M 和 N. 而且，由定理 6.2.3 知 G_S 是可平面的. 从而，由引理 6.3.1 得 Seq 为奇异的. 必要性得证.

反之，因为 Seq 是奇异的，由引理 6.3.1 知与 Seq 的关联图 G_S 同构的基准图是可平面的并且无双循环. 然，由 §3.4 中的通穿规则所得到的那个迂恰以 Seq 为其交叉序列. 这就得到了充分性. ⊡

定理 6.3.1 一个多面形的序列 Seq 是一个交叉序列，当且仅当其交叉图 $G(I)$ 具有如下性质：

(i) $G(I)$ 是 Euler 图；

(ii) $\forall a, b \in V(Int)$ $((a,b) \notin E(Int))$,

$$|\mathrm{Int}\ a \cap \mathrm{Int}\ b| = 0 \pmod 2;$$

(iii) $U(Int)$ 为一个 1- 上边缘.

证 由引理 6.1.1-3 即得必要性.

只需证充分性. 由性质 (iii), $V(Int) = \Xi(Seq)$ 可划分为 M 和 N 使得

$$U(Int) = \{(a,b) | \forall a \in M, \forall b \in N, (a,b) \in E(Int)\}. \tag{6.3.4}$$

令 G_S 为那个由赋 M 中字母的二次出现以相同的幂和 N 中字母的二次出现以不同幂从 Seq 得到之多面形的基准图，如果定义

$$\gamma_S(a) = \begin{cases} \text{Int } a \cup \{a\}, & \text{当} a \in M; \\ \text{Int } a, & \text{当 } a \in N, \end{cases} \tag{6.3.5}$$

和

$$\omega_S(a) = \begin{cases} \text{Int } a, & a \in M; \\ \text{Int } a \cup \{a\}, & a \in N, \end{cases} \tag{6.3.6}$$

则有以下论断.

论断 1　$\forall a,b \in E(G_S) = \Xi(Seq)$, $(\gamma_S(a), \omega_S(a)) = 0$.

证　若否，设对某 $a,b \in E(G_S)$, $(\gamma_S(a), \omega_S(b)) = 1$. 则由 (6.3.5-6), 有

$$(\gamma_S(a), \omega_S(a)) = \begin{cases} |\text{Int } a \ = 0 \ (\text{mod } 2), \text{由性质 (i), 当} a = b; \\ |\text{Int } a \cap \ \text{Int } b| = 0 \ (\text{mod } 2), \text{由性质 (ii)}, \\ \qquad \text{当 } a \neq b \text{ 和 } (a,b) \notin E(Int). \end{cases}$$

这时，只剩下 $a \neq b$ 且 $(a,b) \in E(Int)$ 的情形. 若 a,b 同在 M 中或同在 N 中，则

$$(\gamma_S(a), \omega_S(b)) = |(\text{Int } a \cup \{a\}) \cap \ \text{Int } b| \ (\text{mod } 2).$$

但，由性质 (iii) 有 $|\text{Int } a \cap \ \text{Int } b| = 1 \ (\text{mod } 2)$. 这就意味 $(\gamma_S(a), \omega_S(a)) = 0$ 与假设条件矛盾. 若 a 和 b 中一个属 M, 另一个属于 N, 则由性质 (iii) 有

$$(\gamma_S(a), \omega_S(a)) = |\text{Int } a \cap \ \text{Int } b| = 0 \ (\text{mod } 2).$$

又与假设条件矛盾．从而只能论断成立． ♮

论断 2 G_S 无双循环．

证 首先，因为 $\gamma_S(a)$ 是 G_S 中的一个迁，有

$$\gamma_S(a) \in \text{ Ker } \partial_1 = \mathcal{C}(G_S),$$

即 G_S 的循环空间．由论断 1, $w_(a) \in \mathcal{C}^{\perp}(G_S)$, 即 G_S 的上循环空间．然后，由 (6.3.5-6), 有

$$\forall a \in E(G_S), \qquad a = \gamma_S(a) + \omega_S(b). \tag{6.3.7}$$

从而，由 (3.4.1-3) 可知 G_S 无双循环．即得论断． ♮

论断 3 G_S 是可平面的．

证 由上面的论断 1–2 知对任一 $a \in E(G_S)$, $\gamma_S(a)$ 和 $\omega_S(a)$ 分别为它的主循环和主上循环．进而，由 G_S 的定义那个以 G_S 为基准图的多面形确定了 G_S 在一个曲面上的单面嵌入是奇异的．由引理 6.3.1 即得论断． ♮

由于论断 3, G_S 的单面嵌入中的那个面与在 Seq 上的次序一致，从而， Seq 是奇异的．引理 6.3.2 导致定理成立． ♮

因为高斯首先发现定理 6.3.1 中的条件 (i) 和 (ii), 我们称满足条件 (i) 和 (ii) 的多面形的序列为*高斯序列*. 利用与定理 5.4.2 的证明相仿的方法，我们可以从定理 6.3.1 进而得到如下的定理．

定理 6.3.2 令 Seq 是一个高斯序列，$G(I)$ 为它的交叉图且边集上赋有如下方式的权:

$$\forall e \in E(Int),\ \omega(e) = \begin{cases} 1, & \text{当 } e \in U(Int); \\ 0, & \text{否则}. \end{cases} \tag{6.3.8}$$

则，下面的说法是等价的：

(1)　Seq 是一个交叉序列；

(2)　$G(I)$ 没有奇权圈；

(3)　$G(I)$ 没有奇权基本圈；

(4)　$U(Int)$ 为 $G(I)$ 的一个 1- 上边缘；

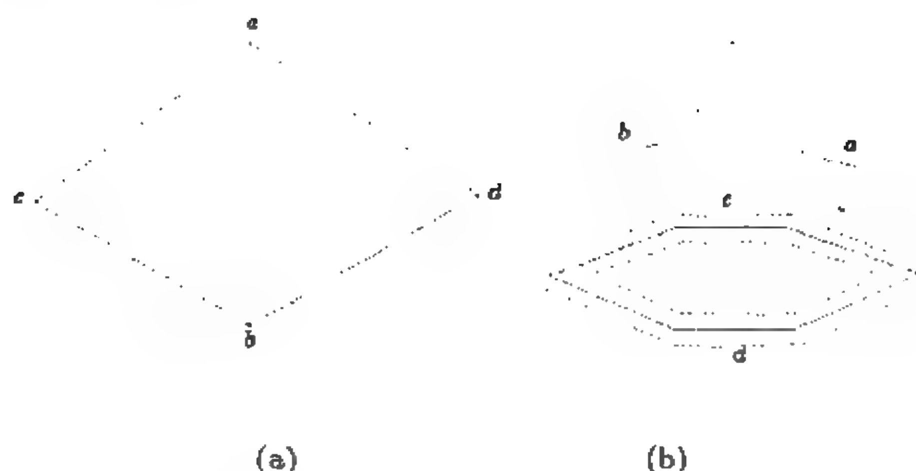
(5)　$G(I)$ 是平衡的.　□

现在，我们可以看到定理中后四个条件的任何一个都仅依赖 $G(I)$ 本身. 或者说它们都是高斯猜想的条件.

这里，需要特别指出的是，如果 Seq 为一个交叉序列，则由引理 6.3.2, 相应多面形的基准图 G_S 与 G_{pc} 或者它的对偶 G^*_{pc}(它们均在 §6.2 中给出) 同构. 而且，不依赖于在确定这些图时作劈分运算的次序的选择. 但，如果 Seq 不是交叉序列，虽然有时 G_{ps} 或 G^*_{pc} 可以被确定，却绝不可能与相应 Seq 的任何一个可迹的多面形基准图 G_S 同构.

令 $Seq = acbdadcb$, 其交叉图 $G(I)$ 如图 6.3.3(a) 所示. 它不是 Euler 图. 从而，Seq 不是一个交叉序列. 然而，其劈分序列 $\widetilde{Seq} = \lambda_d\lambda_c\lambda_b\lambda_a Seq = a'b'c'a'd'c'd'b'$ 有 G_{pc} 如图 6.3.3(b) 所示. 它无双循环但不是可迹的.

若一个多面形的序列 Seq 具有形式 $Seq = CD$ 使得如果将 C 和 D 均视为循环序时，它们均为多面形的，则称 Seq 为**可分离的**. 进而，若 C 和 D 作为多面形的序列均不再可分离，则它们均被称为 Seq 的**连通片**. 当然，一个不可分离的多面形的序列本身就是一个连通片.



(a) (b)

图 6.3.3

引理 6.3.3 一个交叉序列 Seq 本身是一个连通片，当且仅当其 P-C 图 G_{pc} 是一个块(即不可分离的).

证 因为 Seq 是一个交叉序列，则定理 6.3.1 中所定义的图 G_S 与 Seq 的 P-C 图同构. 先证必要性. 设 $G_S = G_1 \cup G_2$ 且 $G_1 \cap G_2 = \{v\}$, v 为 G_S 的一个节点. 由于据引理 6.2.5 知 G_S 是可平面的而且无双循环，则由 §3.4 中的通穿规则在 G_S 上得到的那个唯一的迂 q 必具有形式 $q = AB = Seq$ 使得其中的 A 由 $G_i, i = 1, 2$, 之一中的代表边的字母组成和 B 为由另一个的代表边的字母组成. 从而，序列 Seq 是可分离的. 反之，由上面方法的逆向过程即可得充分性. ♮

引理 6.3.4 对于一个交叉序列 Seq, 它的 P-C 图 $G_{pc}(Seq)$ 是一个块当且仅当它的交叉图 $G(I)$ 是连通的.

证 因为 $G(I)$ 是连通的，当且仅当它的相应的序列 Seq 是一个连通片. 由引理 6.3.3 即得欲证. ♮

定理 6.3.3 一个交叉序列 Seq 有 $r(\geq 1)$ 个连通片当且仅当在平面上有 2^{r-1} 个拓扑不等价的闭曲线使得 Seq 为它们

公共的交叉序列.

证 由于 Seq 是一个有 $r(\geq 1)$ 个连通片的交叉序列，引理 6.3.3-4 表明定理对 $r=1$ 的情形成立. 对 r 用归纳法. 设 $Seq = AB$ 使得 $Seq_2 = B$ 为一个连通片. 从而， $Seq_1 = A$ 有 $r-1$ 个连通片. 从定理 6.3.1 的证明过程可知一个交叉序列仅由一个闭曲线表示，当且仅当它本身是一个连通片. 因为这时 Seq 中字母仅有一种方式由 $U(Int)$ 划分为 M 和 N 以及 M_i 和 N_i 为 Seq_i 中字母之划分， $i=1,2$, 则在固定 M_1 和 N_1 之下 $\{M_1\cup M_2, N_1\cup N_2\}$ 和 $\{M_1\cup N_2, N_1\cup M_2\}$ 为 Seq 的二个划分. 从而，由它们可得 Seq 的二个拓扑不等价的实现. 由归纳假设， Seq_1 有 $2^{(r-1)-1}=2^{r-2}$ 个不同的实现. 因此， Seq 共有 $2\cdot 2^{r-2}=2^{r-1}$ 个不同的实现. 这就得到了必要性.

反之，用与定理 4.3.4 的证明相仿的讨论即可得充分性.

∎

§6.4 注记

6.4.1 本章所讨论的问题是由高斯首先提出和研究的 [Gau1]. 他猜想交叉序列的表征仅依赖交叉图并且发现了定理 6.3.1 中的前二个条件. 然，那时他未能解决. 此问题的第一个解决者是 M.Dehn [De1]. 但， Dehn 的解答如定理 6.2.1 所述与高斯所猜想的全然不同. 如高斯所猜想的第一个表征是由 L.R.Treybig 发现的 [Tr1]. 然而，方法甚为复杂尤不适于计算. 进一步的讨论可参见 [Fr1], [Liu31], [Ma1], [Ro4], [RoR1], [RR1], [Ti1] 和 [Wht9].

6.4.2 关于算法， Dehn 的方法如定理 6.2.1 所建议的相当简单. 事实上, 算法复杂性为 $O(n^2)$, n 为序列中字母的数目. 不过 Dehn 的文章如 Grunbaum 所说相当长而且不易读 [Gru1].

另一方面，基于高斯猜想的算法如定理 6.3.1 所示为 $O(n^3)$. 它是由 Read 和 Rosenstiehl 所发现的. 不管怎样，基于定理 6.2.3, 利用在 §7.1 中将会讨论的判定 3- 正则 Hamilton 图的平面性的结果可以设计一个 $O(n)$ 的算法. 进而，对于一些推广的问题也可得到 $O(n)$ 的算法. 这方面的结果可参考 [Ro4], [RT2] 以及 [Liu27].

6.4.3 关于 4- 正则平面图有二个互为平面对偶的关联图与 $G(Z)$ 有 $G_S(Z)$ 和 $G_S^*(Z)$ 一样，曾被用来计数平面四边形剖分. 借此，又导致有根平面 3- 网的计数，这些可参见 Mullin 和 Schellenberg 的文章 [MuS1].

6.4.4 这里的交叉图与第五章中以及进而在第七章讨论的平面性辅助图似有异曲同工之妙.

6.4.5 本章的理论在研究拓扑学中的纽结问题时起重要作用. 这一点将会在第十五中看到.

第七章

平面嵌入

§7.1 左和右确定

首先，我们讨论有关立方的，或者说 3- 正则图当确向树在一个 Hamilton 圈上的情形下平面性判定与确立平面嵌入的问题. 已经在第六章中看到了，这类图对于高斯交叉问题尤为重要. 实际上，一个交叉序列的劈分图就是这类图.

引理 7.1.1 对于 3- 正则图 G, 其上有一个确向树 Tod 为路(特别地，在一个 Hamilton 圈上), 有事实：每一个上树边 $\gamma \in Tod^*$ 在 $Aux_0(G)$ 中伴随至多两个变量. 其一为树变量，另一个为上树变量.

证 由 3- 正则性，任何二个基本圈 C_α, C_β, $\alpha, \beta \in Tod^*$, 若有公共节点则必有公共边. 不失一般性，可设 $h(\alpha) \prec h(\beta)$. 其中， $\prec$ 为 §5.4 中所提到的在一个确向树上的偏序集 $(V; \preceq)$ 中之序关系. 由定理 5.3.2 知与 $C_\alpha \cup C_\beta$ 关联的两个变量中一个为树变量另一个为上树变量. 用 y_β 表示后者. 它由 β 与那条从 $h(\beta)$ 发出的树边所形成. 用 x_α 或者 x_β 表示前者. 因 Tod 是一条路，它分别对应 α 或那条从 $t(\alpha)$ 发出的树边，当 $t(\alpha) \prec t(\beta)$;

对应 β 或那条从 $i(\beta)$ 发出的树边，否则，由于 y_β 和 x_α 分别为与 β 和 α 关联的唯一的上树变量和树变量，即得引理. ▯

由这个引理，我们可以看出，对于 G，其平面性 0- 辅助图 $Aux_0(G)$ 的阶在 3- 正则的条件下是 G 的阶的一个线性函数. 但， $Aux_0(G)$ 的度仍然是 G 的阶的一个二次函数. 为了减少平面性辅助图的度，可以想象分为二个阶段：其一为判定平面性求出 $Aux_0(G)$ 的一个子图使得它有奇权圈当且仅当 $Aux_0(G)$ 有奇权圈；其二是为将一个可平面图嵌入到平面上使得这个子图的连通片的数目与 $Aux_0(G)$ 上的相同. 并且它的度愈小愈好.

由于 Tod 是一条路，偏序集 $(V,\preceq)$ 确定了一个线性序. 令 Seq 为节点处相应的与此线性序一致的变量序列. 且， Seq 的最小和最大元分别记为 y 和 x. 这时， (y,x) 必为 G 的 Hamilton 圈上的那条上树边. 一个子序列 $Sub=\tilde{y}_\beta y_\alpha y_\gamma\ x_\beta x_\alpha \tilde{x}_\gamma$ (或 $y_\beta\tilde{y}_\alpha y_\gamma x_\beta\tilde{x}_\alpha x_\gamma$)， $y\preceq\tilde{y}_\beta\prec y_\alpha$, $x_\alpha\prec\tilde{x}_\gamma\preceq x$(或 $y\preceq y_\beta\prec\tilde{y}_\alpha$, $\tilde{x}_\alpha\prec x_\gamma\preceq x$)，如果存在 l, $l=k \pmod 2$, $k\geq 1$, 使得

$$(\tilde{y}_\beta,x_\beta)=\begin{cases} y_k y_\alpha\left(\prod\limits_{\substack{i=1\\ y_1=y_\beta}}^{k-1} y_i x_{i+1}\right)y_\gamma x_\beta, & k\geq 2;\\ \\ y_\beta y_\alpha y_\gamma x_\beta, & k=1, \end{cases} \tag{7.1.1}$$

其中 $\tilde{y}_\beta=y_k$, $k\geq 2$; y_β, $k=1$ 和

$$(y_\gamma,\tilde{x}_\gamma)=\begin{cases} y_\gamma x_\beta\left(\prod\limits_{\substack{i=1\\ x_1=x_\gamma}}^{l-1} y'_{i+1}x'_i\right)x_\alpha x'_l \\ \\ y_\gamma x_\beta x_\alpha x_\gamma, & l=1 \end{cases} \tag{7.1.2}$$

其中 $\tilde{x}_\gamma=x'_l$, $l\geq 2$; x_γ, $l=1$(或如果存在一个 k =1 (mod 2),

$k \geq 3$, 使得 $Seq(G)$ 有如下的子序列:

$$(\tilde{y}_\alpha, \tilde{x}_\alpha) = y_k y_\gamma \left(\prod_{i=1}^{k-1} y_i x_{i+1} \right) x_\beta x_1$$

其中 $\tilde{y}_\alpha = y_k$ 和 $\tilde{x}_\alpha = x_1$). 则称之为 禁用的.

图 7.1.1

引理 7.1.2 一个确向树 Tod 在 Hamilton 圈上的 3- 正则图 G 是可平面的当且仅当 $Seq(G)$ 不含禁用的子序列.

证 先证必要性. 设 $Seq(G)$ 有一个禁用子序列 $Sub = \tilde{y}_\beta y_\alpha y_\gamma x_\beta x_\alpha \tilde{x}_\gamma$. 则, 由于我们总能在 $Aux_0(G)$ 中发现一个奇权圈, 如图 7.1.1 对于形式 (7.1.1-2) 中 $k=1$ 和 $l=3$ 所示, 从定理 5.4.1 可得 G 必为非可平面的. 注意, 在图 7.1.1 (a) 中, 粗线表示 Tod. 而在图 7.1.1 (b) 中, 粗线表示权为 1 和箭头显示了依 Sub 的线性序求出一个奇权圈的过程.

反之, 用对于一般 3- 正则 Hamilton 图的引理 6.2.6, 借助于枚举可能之情形即可发现只要 G 是非可平面的必导致一个禁用子序列的出现. $\Box$

只要 G 被确定是可平面的 (因为假定 G 是 3- 正则的且有一个确向树 Tod 在一个 Hamilton 圈上, 可以用引理 7.1.2 的证明中提到的方法), 我们总能沿 G 上由 Tod 所确定的线性序求得

$Aux_0(G)$ 的一个支撑森使得它的连通片的数目与 $Aux_0(G)$ 的相同. 并且，称这样的森为 G 的 平面性 c- 辅助图，记为 $Aux_c(G)$. 为了使 G 的浸入是唯一确定的，我们总是将其上的那个 Hamilton 圈作为平面上的一个 Jordan 闭曲线. 所有不在这个圈上的边全放在这个曲线之同侧 (如内部，或外部)，这时，方程 (5.3.5) 必为如下形式：

$$\begin{cases} y_\alpha + x_\alpha = 0, & \forall \alpha \in Tod^*; \\ y_\alpha + x_\beta = 1, & \forall \alpha, \beta \in Tod^* \\ \qquad (y_\alpha \prec x_\beta \prec x_\alpha \prec x_\beta). \end{cases} \tag{7.1.3}$$

由 (7.1.3) 中的第一类型的方程，所有的解必为 $x_\alpha = y_\alpha$, $\alpha \in Tod^*$, 之形式，从而，上树边可以分为二类：

$$\begin{cases} A_0 = \{\alpha | \forall \alpha \in Tod^*, \quad y_\alpha = x_\alpha = 0\}; \\ A_1 = \{\alpha | \forall \alpha \in Tod^*, \quad y_\alpha = x_\alpha = 1\}. \end{cases} \tag{7.1.4}$$

定理 7.1.1 *任何一个 3- 正则可平面图 G 若有一个确向树 Tod 在一个 Hamilton 圈上，则必有这样的一个平面嵌入使得所有 A_0 中的边皆在 Tod 的右 (或左) 侧而所有 A_1 中的边皆在 Tod 的左 (或右) 侧.*

证 由定理 5.4.1 可知方程 (7.1.3) 在 $Aux_c(G)$ 上的任何一组解均可以延拓到 $Aux_0(G)$ 上. 按照 (7.1.3) 的第二类方程，如果 $\alpha, \beta \in Tod^*$ 在上述的浸入中交叉，则它们不可能属于 (7.1.4) 中之同一类. 即，$\alpha \in A_0$ 和 $\beta \in A_1$, 或者 $\alpha \in A_1$ 和 $\beta \in A_0$. 从而，定理得证. ▯

另一方面，也许人们会想到利用 $Aux_1(G)$. 同样地，对于

3- 正则的图但其上有一个确向树是路，不限定在 Hamilton 圈上. 因为 Tod 是一条路，在由 (5.4.6) 所定义的 Tod^* 上，或相应地 $V^1_{au}(G)$ 上的偏序 $*\prec$ 变为如下确定的线性序：

$$\alpha * \prec \beta \Longleftrightarrow h(\alpha) \prec h(\beta).$$

进而，还允许我们定义另一个在 Tod^*(或相应地 $\mathcal{X}_G(T)$) 上的线性序，用 $\prec *$ 表示： $\forall \alpha, \beta \in Tod^*(x_\alpha, x_\beta \in \mathcal{X}_G(T))$,

$$\alpha \prec * \beta \ (\text{或}\ x_\alpha \prec * x_\beta) \Longleftrightarrow t(\alpha) \prec t(\beta). \tag{7.1.5}$$

由引理 7.1.1, 在这里，有

$$|\mathcal{X}_G(T)| \leq \nu. \tag{7.1.6}$$

对于一对上树变量 (y_α, y_β), 若在 $\cdot\prec$ 或者就 3– 正则的情形同样地 $\preceq$ 之下， α 覆盖 β, 或 α 被 β 所覆盖，则 α 和 β 被称为 **相继的**.

令 $A_{0s}(G;Tod^*)$ 是所有那些 $A_0(G;Tod^*)$ 中的相邻而且相继的上树边对的集合. 当然，如 (5.4.9) 所定义的总有

$$A_{0s}(G;Tod^*) \subseteq A_0(G;Tod^*) \subset E^1_{au}(G)$$

和在 3– 正则情形下，

$$|A_{0s}(G;Tod^*)| \leq \nu(G). \tag{7.1.7}$$

记 $A_{0n}(G;Tod^*) = A_0(G;Tod^*) - A_{0s}(G;Tod^*)$. 由于对任何 $(y_\alpha, y_\beta) \in A_{0n}(G;Tod^*)$, 从 (5.4.8) 和 (5.4.10) 可知总有 $\xi \in Tod^*$ 出现在引理 5.4.7 所定义的类型 C 中使得

$$\begin{cases} h(\alpha) \prec h(\xi) \prec h(\beta); \\ t(\xi) \preceq \langle t(\alpha), t(\gamma) \rangle. \end{cases}$$

令 $t(\xi_0)=\max t(\xi)$, 其中 ξ 取遍所有满足上述性质的. 定义一个映象 $\tau: \mathcal{A}_{0n}(G;Tod^*)\to\mathcal{X}_G(T)$ 使得

$$\tau(y_\alpha,y_\beta)=x_{\xi_0}. \tag{7.1.8}$$

引理 7.1.3 映象 τ 是一个单射.

证 用反证法. 不失一般性, 假设 $(y_\alpha,y_\beta),(y_\gamma,y_\delta)\in\mathcal{A}_{0n}(G;\ Tod^*)$ 使得 $\tau(y_\alpha,y_\beta)=\tau(y_\gamma,y_\delta)=x_\xi$ 且 $\alpha<\beta$, $\gamma\prec\delta$ 和 $(\alpha,\beta)\neq(\gamma,\delta)$. 由 x_ξ 的定义, $(h(\alpha),h(\beta))$ 与 $(h(\gamma),h(\delta))$ 不允许是交错的. 因此, 不计对称性只可能有两种情形发生.

情形 1 $h(\alpha)\preceq(\gamma)\prec h(\xi)\prec h(\delta)\preceq h(\beta)$ 且不是 $h(\alpha)\prec h(\gamma)$ 就是 $h(\delta)\prec h(\beta)$. 因为 $(y_\gamma,y_\delta)\in\mathcal{A}_0(G;Tod^*)$, 即 γ 和 δ 在类型 C 中, 我们有 $\max\{t(\delta),t(\gamma)\}\prec\min\{t(\alpha),t(\beta)\}$. 然而, 由于 $t(\xi)\prec\min\{t(\gamma),t(\delta)\}$, 必有 $\tau(y_\alpha,y_\beta)\neq x_\xi$. 与 $\tau(y_\alpha,y_\beta)=x_\xi$ 的前提条件矛盾.

情形 2 $h(\gamma)\prec h(\alpha)\prec h(\xi)\prec h(\beta)\prec h(\delta)$. 因为 $(y_\alpha,y_\beta)\in\mathcal{A}_0(G;Tod^*)$, 必有 $t(\xi)\prec\min\{t(\alpha),t(\beta)\}$. 又与 $\tau(y_\gamma,y_\delta)=x_\xi$ 之条件矛盾.

从而, 只能引理成立. ♮

由 (7.1.6) 和引理 7.1.3, 即得

$$|\mathcal{A}_{0n}(G;Tod^*)|\leq\gamma(G). \tag{7.1.9}$$

进而, 由于在这里之情形下, 根据引理 5.4.6, 每一个树变量至多关联一对上树变量使得在类型 A 或类型 B 中出现, 故

$$|\mathcal{A}_1(G;Tod^*)|\leq\nu(G). \tag{7.1.10}$$

定理 7.1.2 对任何 3- 正则且有一个确向树为路 (不一定在 Hamilton 圈上) 的图 G, 有

$$|E^1_{au}(G)| \le 3\nu(G). \tag{7.1.11}$$

证 由 (5.4.9) 和上面所讨论的，有

$$E^1_{au}(G) = \mathcal{A}_{0s}(G;Tod^*) + \mathcal{A}_{0n}(G;Tod^*) + \mathcal{A}_1(G,Tod^*).$$

则，由 (7.1.7), (7.1.9) 和 (7.1.10) 即得定理. ▮

相仿地，对于任何有一确向树 Tod 为路的图 G(不一定是 3- 正则的), 因为引理 7.1. 1 和 (7.1.5–10) 均可延伸到这种情形，其平面性 1- 辅助图 $Aux_1(G)$ 也满足关系 (7.1.11). 正如 [Sun1] 中所示，需要特别指出的只是 (7.1.8) 中的 ξ_0 用 ξ_0' 代替. 其中, $h(\xi_0') = \min\{h(\xi)|h(\alpha) \prec h(\xi) \prec h(\beta), t(\xi) = t(\xi_0)\}$, 同时，由于这时在每个节点处允许更多的上树边发出而不是在 3- 正则时只有一个，在 $\mathcal{X}_G(T)$ 上的线性序 $\prec *$ 也需要延拓到这种较一般的情形. 不过，我们也可以将这种情形变换为 3- 正则的情形. 下一节将会详述这一想法.

而且，通过将确向树 Tod 划分为路和将 G 上的问题分解为对于路的，在最一般的情形也可以得到与定理 7.1.2 相仿的结果. 只不过要通过一系列的处理之后才能实现这种分解.

§7.2 禁用构形

令 $(V,\preceq)$ 为由图 $G=(V,E)$ 上的一个确向树所确定的偏序集. 这一节及下一节之目的在于求禁用构形的完备集. 所谓禁用构形, 在这里就是指这样的一类极小子图使得它的出现必导致其基准图 (或者说，母图) 为非可平面的而且它本身不再

有这种性质的真子图. 其 *完备集* 就是指任何非可平面图均有它的一个元素作为禁用构形. 而且, 这里的禁用构形是用序关系 $\preceq$ 描写的以便于建立算法. 从与 §4.3 中相仿的讨论, 因为任何极小的非可平面图, 特别是禁用构形必均为 3- 连通的, 我们这里仍可只局限于 3- 连通的图而不失一般性. 也常称这种对于平面性的禁用构形为 *平面性障碍*.

首先, 还是研究 Hamilton 图并且确向树限制在其上. 令 G 就是这种图, 它的确向树 Tod 是一条 Hamilton 路, 对于 $v \in V$, 记

$$\begin{cases} B(v) = \{\alpha | \forall \alpha \in Tod^*(\alpha \neq \alpha_0),\ t(\alpha) = v\}; \\ H(v) = \{\alpha | \forall \alpha \in Tod^*(\alpha \neq \alpha_0),\ h(\alpha) = v\}. \end{cases} \tag{7.2.1}$$

其中, α_0 是 Hamilton 圈上的那条上树边. 因为 Tod 是 Hamilton 圈上的路, 有 $\forall v \in C$,

$$\rho(v) = |B(v)| + |H(v)| + 2. \tag{7.2.2}$$

由 G 无重边, 可记

$$\begin{cases} B(v) = \{\alpha_i' | h(\alpha_1') \prec h(\alpha_2') \prec \cdots \prec h(\alpha_t')\} \\ H(v) = \{\alpha_i | t(\alpha_1) \prec t(\alpha_2) \prec \cdots \prec t(\alpha_h)\}, \end{cases} \tag{7.2.3}$$

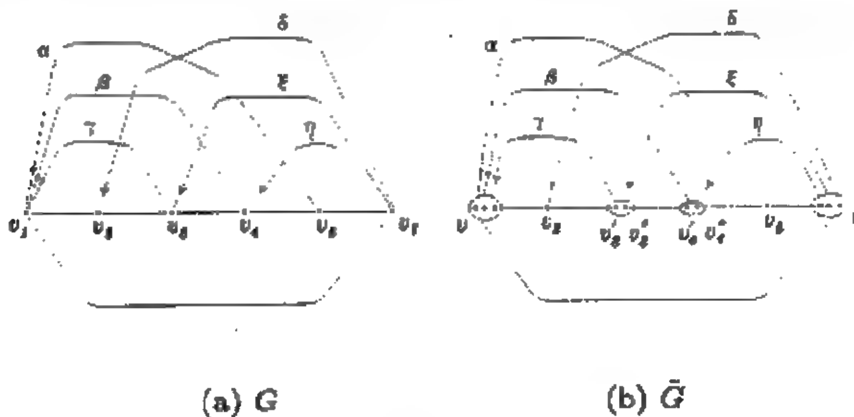
其中 $t = |B(v)|$ 和 $h = |H(v)|$.

对任何 $v \in V$, $\rho(v) > 3$, 我们用 $\rho(v) - 2$ 个节点的路 $v_1' \prec v_2' \prec \cdots \prec v_t' \prec v_1 \prec v_2 \prec \cdots \prec v_h$, v_t' 处在 v 的位置, 在 Tod 上代替 v 使得

$$\begin{cases} t(\alpha_{t+1-i}') = v_i', \quad i = 1, 2, \cdots, t; \\ h(\alpha_j) = v_{h+1-j}, \quad j = 1, 2, \cdots, h. \end{cases} \tag{7.2.4}$$

将所得的图用 $\tilde{G}$ 表示. 则, $\tilde{G}$ 是 3- 正则的并且其上的确向树 $\widetilde{Tod}$ 是在 Hamilton 圈上的一条路, 如图 7.2.1 所示. 我们称从 G 到 $\tilde{G}$ 的每一步甚至整个过程为 伸长. 伸长的逆运算被称为缩短.

引理 7.2.1 一个确向树在 Hamilton 圈上的图 G 是可平面的, 当且仅当如上所确定的 $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E})$ 是可平面的.



(a) G (b) $\tilde{G}$

图 7.2.1

证 事实上, 若在 Tod^* 上的线性序取作与 $\tilde{G}$ 由 $\widetilde{Tod}$ 所确定的偏序集 $(\tilde{V},\preceq)$ 一致, 由于 Tod 是一条路, 只有引理 5.4.7 中的类型 A 和类型 C 允许在 G 中出现. 进而, 容易验证 $Aux_1(G)\cong Aux_1(\tilde{G})$. 其中, G 和 $\tilde{G}$ 中上树变量之间的自然对应所导致的 $V^1_{au}(G)$ 和 $V^1_{au}(\tilde{G})$ 之间的对应就是 $Aux_1(G)$ 和 $Aux_1(\tilde{G})$ 之间的一个同构. 从而, 由定理 5.4.2, 即得引理. ▯

基于这个引理, 我们可以在给定的条件下作出对 $Aux_1(G)$ 的度的估计.

定理 7.2.1 对于一个确向树在 Hamilton 圈上的图 $G=(V,E)$, 有

$$\varepsilon(Aux_1(G))\leq 12\nu(G)-36. \tag{7.2.5}$$

证 由定理 7.1.2 可知 $\varepsilon(Aux_1(\tilde{G})) \leq 3\nu(\tilde{G})$. 因为根据 §4.1 中所讨论的得到 $\varepsilon(G) = |E(G)| \leq 3\nu(G) - 6$, 在 $\tilde{G}$ 中，至多有 $2(3\nu(G) - 6 - \nu(G) + 1 - 1) = 3\nu(G) - 12$ 个附加的节点. 而且，由引理 7.2.1 的证明过程可得

$$\varepsilon(Aux_1(G)) = \varepsilon(Aux_1(\tilde{G})) \leq 3(\nu(G) + 3\nu(G) - 12).$$

从而，即得 (7.2.5). 定理得证. ♮

在一个确向树 Tod 为 Hamilton 圈上的路的图 $G = (V, E)$ 中，若两个上树边 $\alpha, \beta \in Tod^*$ 满足：

$$h(\alpha) \preceq h(\beta) \preceq t(\beta) \preceq t(\alpha),$$

则称它俩是*平行的*, 并用 $\alpha // \beta$ 表示；如果

$$h(\alpha) \prec h(\beta) \prec t(\alpha) < t(\beta),$$

则称它们为*交错的*, 并用 $\alpha \bowtie \beta$ 表示；否则，称它们是*串行的*, 记为 $\alpha| - |\beta$, 或者说满足关系：

$$h(\alpha) \prec t(\alpha) \preceq h(\beta) \prec t(\beta).$$

引理 7.2.2 *一个确向树 Tod 在 Hamilton 圈上的图 G 是可平面的，当且仅当除在 Hamilton 圈上的那条上树边外所有的上树边可划分为二类： I 和 O 使得在同一类的任何两条边均非交错的.*

证 由引理 7.2.1, 只需讨论 $\tilde{G}$. 它是 3- 正则的而且确向树 $\widetilde{Tod}$ 在 Hamilton 圈上. 由引理 6.2.6, $\tilde{G}$ 有两个 Dyck 字. 而且，每一个 Dyck 字确定了一类上树边使得其中的任二边不交

错. 同时, 由 (7.2.4) 可知: G 中的二上树边是交错的, 当且仅当它们在 $\check{G}$ 中的相应边是交错的. 从引理 7.2.1, 即得引理. ▯

在一个图 $G=(V,E)$ 中, 确向树 Tod 确定了一个偏序集 $(V,\preceq)$. 任何二个节点 u 和 v, 若满足如下的条件:

(1) $\forall w \in V\ (u \prec w \prec v)$, $\rho_G(w)=2$, 或者 u 被 v 覆盖;

(2) $\max\{t(\alpha)|\forall\alpha \in Tod^*, h(\alpha)=v\}$

$$\prec \min\{t(\beta)|\forall\beta \in Tod^*, h(\beta)=u\};$$

(3) $\max\{h(\alpha)|\forall\alpha \in Tod^*, f(\alpha)=v\}$

$$\prec \min\{h(\beta)|\forall\beta \in Tod^*, t(\beta)=u\},$$

则被称为 可缩短的. 由条件 (1), 我们也可以说路 $P(u,v)$ 是可缩短的. 如果 Tod 在一个 Hamilton 圈上, 则 G 是可平面的, 当且仅当

$$G' = \prod_{e\in P(u,v)} G\cdot e$$

是可平面的. 其中 $P(u,v)$ 是一条可缩短的路. 若一个图 H 可以从 G 经过一系列地收缩 Tod 上可缩短路上的边而得到, 则称 G可缩短到H.

定理 7.2.2 一个确向树 Tod 在 Hamilton 圈上的图 G 是可平面的, 当且仅当 G 没有一个子图可缩短到如下的构形 A 或构形 B:

构形 A: $\exists\alpha,\beta,\gamma,\delta \in Tod^*$,

$$h(\delta)=h(\dot\beta)\prec h(\alpha)\prec h(\dot\gamma)\prec h(\dot\beta)$$

$$\prec t(\alpha)\prec t(\dot\gamma)=t(\delta).$$

其中, 对于某 $l=k \pmod 2$,

$$\dot{\beta} = \begin{cases} \beta, & \text{当 } l = 1; \\ h(\beta_l)\Big(\prod_{i=1}^{l-1} h(\beta_i)t(\beta_{i+1})\Big)t(\beta_1), & \\ & \text{当 } l \geq 1. \end{cases} \tag{7.2.6}$$

这里， $h(\delta) = h(\beta_l) = h(\dot{\beta}), h(\beta_{l-1}) = h(\alpha), t(\beta_2) = h(\dot{\gamma})$, $t(\beta_1) = t(\dot{\beta})$, $t(\gamma_i) = h(\gamma_{i-2})$, $i = 3, 4, \cdots, l$, $\beta_i \in Tod^*$, $1 \leq i \leq l$. 以及，

$$\dot{\gamma} = \begin{cases} \gamma, & \text{当 } k = 1; \\ h(\gamma_1)\Big(\prod_{i=2}^{k} h(\gamma_i)t(\gamma_{i-1})\Big)t(\gamma_k), & \\ & \text{当} h > 1. \end{cases} \tag{7.2.7}$$

这里， $h(\gamma_1) = h(\dot{\gamma}), h(\gamma_2) = t(\dot{\beta}), t(\gamma_{k-1}) = t(\alpha), t(\gamma_k) = t(\dot{\gamma}) = t(\delta)$, $t(\gamma_1) = h(\gamma_{i+2})$, $i = 1, 2, \cdots, k-2$, $\gamma_i \in Tod^*$, $1 \leq i \leq k$.

构形 B: $\exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in Tod^*$,

$$h(\delta) = h(\beta) = h(\hat{\alpha}) \prec h(\gamma) \prec t(\beta)$$

$$\prec t(\hat{\alpha}) = t(\gamma) = t(\delta).$$

其中，对某 $r = 1 \pmod 2$,$r \geq 3$,

$$\hat{\alpha} = h(\alpha_1)\ h(\alpha_2)\Big(\prod_{i=1}^{r-2} t(\alpha_i)h(\alpha_{i+2})\Big)$$

$$t(\alpha_{r-1})t(\alpha_r). \tag{7.2.8}$$

这里，$h(\hat{\alpha}) = h(\alpha_1) = h(\beta) = h(\delta)$, $h(\alpha_2) = h(\gamma)$, $t(\alpha_{r-1}) = t(\beta)$, $t(\hat{\alpha}) = t(\alpha_r) = t(\gamma) = t(\delta)$, $t(\alpha_i) = h(\alpha_{i+2})$, $i = 1, 2, \cdots, r-2$, $\alpha_i \in Tod^*$, $1 \le i \le r$.

证 由引理 7.2.1, 我们可以只讨论 3- 正则图 $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$, 其中确向树为 $\widetilde{Tod}$. 因为 $\tilde{G}$ 经过伸长所得到. 从 $\tilde{G}$ 的一个确向树 Tod 在 Hamilton 圈上可知 $\widetilde{Tod}$ 也是在 Hamilton 圈上.

根据定理 7.1.1, $\tilde{G}$ 是可平面的当且仅当 $\tilde{G}$ 含有一个禁用序列

$$Sub_1 = \tilde{y}_\beta y_\alpha y_\gamma x_\beta x_\alpha \tilde{x}_\gamma \text{ 或 } Sub_2 = y_\beta \tilde{y}_\alpha y_\gamma x_\beta \tilde{x}_\alpha x_\gamma.$$

因为 $\widetilde{Tod}$ 在 Hamilton 圈上，我们总可选择 δ 为 Hamilton 圈上的那条上树边.

而且，可以看出 Sub_1 在 $\tilde{G}$ 中出现当且仅当构形 A 在 G 中出现和 Sub_2 在 $\tilde{G}$ 中出现当且仅当构形 B 在 G 中出现，事实上，通过缩短即可得到. 从而，由引理 7.2.1 即可导出定理. ♮

当然，我们可以用引理 7.2.2, 通过与定理 7.1.1 的证明的相仿的方式直接证明这个定理. 但是，这个定理不能简单地引伸到确向树为路但不在 Hamilton 圈上的情形. 在下一节，我们将会看到一般的图的平面性禁用构形的表征.

现在我们开始考察确向树是路但不一定在 Hamilton 圈上情形下的平面性 1- 辅助图 $Aux_1(G; Tod^*)$ 以便直接估计它的度.

令 $(V, \preceq)$ 为 Tod 在 $G = (V, E)$ 上所确定的偏序集. 由定理 7.1.1, 这时仍允许我们用上树边区别树变量，即 $\mathcal{X}_G(T) = \{x_\alpha | \forall \alpha \in Tod^*\}$. 因为可能会出现 $\alpha, \beta \in Tod^*$ 使得 $h(\alpha) = h(\beta)$ 或者 $t(\alpha) = t(\beta)$. 这个偏序集 $(V, \preceq)$ 不能导致 $\mathcal{G}_G(T)$ 或 $\mathcal{X}_G(T)$

上的一个线性序，我们定义：$\forall \alpha, \beta \in Tod^*$,

$$y_\alpha * \prec y_\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \prec \beta, & \text{当 } h(\alpha) \prec h(\beta); \\ t(\alpha) \succ t(\beta), & \text{否则}, \end{cases} \tag{7.2.9}$$

和

$$x_\alpha \prec * \, x_\beta \Leftrightarrow \begin{cases} t(\alpha) \prec t(\beta), & \text{当 } t(\alpha) \neq t(\beta); \\ h(\alpha) \succ h(\beta), & \text{否则}. \end{cases} \tag{7.2.10}$$

容易验证，$* \prec$ 和 $\prec *$ 分别为 $\mathcal{Y}_G(T)$ 和 $\mathcal{X}_G(T)$ 上的线性序. 当 (7.2.9) 所定义 $* \prec$ 作为 Tod^* 上的线性序时，似乎仅是 (5.4.6) 所定义的一种特殊情形. 然，在我们这里它们之间无异.

若二变量 $y_\alpha, y_\beta \in \mathcal{Y}_G(T)$, 其中之一个覆盖另一个，则也称它们是**相继的**, 并且用 $y_\alpha suc_{*\prec} y_\beta$ 或反之表示. 令

$$\mathcal{A}_{0s}(G; Tod^*) = \Big\{(y_\alpha, y_\beta) | \forall (y_\alpha, y_\beta) \in \mathcal{A}_0(G; Tod^*), \\ y_\alpha \ suc_{*\prec} \ y_\beta\Big\} \tag{7.2.11}$$

和 $\mathcal{A}_{0n}(G; Tod^*) = \mathcal{A}_0(G; Tod^*) - \mathcal{A}_{0s}(G; Tod^*)$, 则，这时有平面性 1- 辅助图 $Aux_1(G)$ 的边集为

$$E^1_{au}(G) = \mathcal{A}_{0s}(G; Tod^*) + \mathcal{A}_{0n}(G; Tod^*) \\ + \mathcal{A}_1(G; Tod^*). \tag{7.2.12}$$

引理 7.2.3 对于确向树 Tod 为图 $G = (V, E)$ 中的路，有

$$|\mathcal{A}_{0n}(G; Tod^*)| \leq \nu(G). \tag{7.2.13}$$

证 首先, 我们可以造一个映象 $\tau: \mathcal{A}_{0n}(G;Tod^*) \to \mathcal{X}_G(T)$ 使得对任何 $(y_\alpha, y_\beta) \in \mathcal{A}_{0n}(G;Tod^*)$, $\tau(y_\alpha, y_\beta) = x_\xi$. 其中

$$x_\xi = \min_{*\prec} \left\{x_\gamma | \forall\gamma \in Tod^*, y_\alpha *\prec y_\gamma *\preceq y_\beta\right\}. \tag{7.2.14}$$

然后，证明 τ 是一个单射. 假若不然，设 $(y_{\alpha_1}, y_{\beta_1}), (y_{\alpha_2}, y_{\beta_2}) \in \mathcal{A}_{0n}(G;Tod^*)$, $\tau(y_{\alpha_1}, y_{\beta_1}) = \tau(y_{\alpha_2}, y_{\beta_2}) = x_\xi$. 不失一般性，总可令 $y_{\alpha_1} * \prec y_{\beta_1}$ 和 $y_{\alpha_2} * \prec y_{\beta_2}$. 但，$(y_{\alpha_1}, y_{\beta_1}) \neq (y_{\alpha_2}, y_{\beta_2})$. 由相邻性，只需讨论二个可能情形.

情形 1 $y_{\alpha_2} *\prec y_{\alpha_1} *\prec y_{\beta_1} *\prec y_{\beta_2}$. 自然，至多 $y_{\alpha_2} = y_{\alpha_1}$ 和 $y_{\beta_1} = y_{\beta_2}$ 之一成立. 然，这时有

$$t(\xi) \prec \min\{t(\alpha_1), t(\beta_1)\} \leq \min\{t(\alpha_2), t(\beta_2)\}.$$

由 §5.4 中类型 C 的定义，可不妨假设 α_1 满足

$$y_{\alpha_2} *\prec y_{\alpha_1} *\prec y_{\beta_2}.$$

由于 $t(\alpha_1) \succ t(\xi)$; 这就导致与 $\tau(y_{\alpha_2}, y_{\beta_2}) = x_\xi$ 矛盾.

情形 2 $y_{\alpha_1} * \prec y_{\alpha_2} *\prec y_{\beta_2} *\prec y_{\beta_1}$. 由相邻性和类型 C 的定义，只可能

$$t(\xi) \prec \max\{t(\alpha_1), t(\beta_1)\} \prec \min\{t(\alpha_2), t(\beta_2)\}.$$

然而，这又会导致与 $\tau(y_{\alpha_1}, y_{\beta_1}) = x_\xi$ 矛盾.

这样，由单射性即得

$$|\mathcal{A}_{0n}(G;Tod^*)| \leq |\mathcal{X}_G(T)| \leq 3\nu(G) - 6.$$

引理得证. ♮

定理 7.2.3 若确向树 Tod 是图 $G=(V,E)$ 上的一条路，则我们有

$$|E^1_{au}(G)| \le 9\nu(G)-19. \tag{7.2.15}$$

证 因为确向树 Tod 为 G 上的路，$\mathcal{A}_1(G;Tod^*)(\subseteq E^1_{au}(G))$ 中的每一条边只允许与一个类型 A 关联 (§5.4). 对于 $x_\alpha \in \mathcal{X}_G(T)$, 由 (5.4.4) 知在 $\mathcal{A}_1(G;Tod^*)$ 中至多有一对相邻的上树变量. 就是说，

$$|\mathcal{A}_1(G;Tod^*)| \le |\mathcal{X}_G(T)| \le 3\nu-6. \tag{7.2.16}$$

由 (7.2.12), (7.2.15-16) 和

$$|\mathcal{A}_{0s}(G;Tod^*)| \le |\mathcal{Y}_G(T)|-1 \le 3\nu-7,$$

可得

$$|E^1_{au}(G)| \le 3(3\nu(G)-6)-1 = 9\nu(G)-19.$$

这就是定理的结论. ▯

§7.3 基本序表征

令 $G=(V,E)$ 是一个一般的图，当然，是连通的. 其上的确向树为 Tod. 由 Tod 所确定的偏序集 $(V,\preceq)$ 导出一个序，并称之为 G 的 *基本序*, 用 $*\prec$ 表示. 由 (5.4.6) 所定义的就是一例. 将 Tod^* 视为所有上树边的集合时，$*\prec$ 是定义在 Tod^* 上的. 基于这个基本序在 §5.4 中定义了平面性 1- 辅助图 $Aux_1(G)$.

引理 7.3.1 一个图 $G=(V,E)$, Tod 为其上的一个确向树; G 是可平面的，当且仅当所有 Tod^* 中的上树边可以划分为二类: $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 使得在同一类中的任二上树边均不会同出现在类型 A 或类型 B 中(在引理 5.4.7 中定义的)和任二出自不

同类的上树边不会同出现在类型 C 中(也在引理 5.4.7 中给出了定义).

证 若 G 是可平面的，则由定理 5.4.2 中的 (5) 知 $Aux_1(G)$ 是平衡的. 令 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 分别为所有那些二端同带 "+" 和 "−" 的上树边的集合. 由定理 5.4.2 中的 (4) 可知任何两条同在 $\mathcal{P}_1$ 或 $\mathcal{P}_2$ 中的上树边不可能同出现在类型 A 或类型 B 中和 $\mathcal{P}_1$ 中的任何一条上树边均不可能与 $\mathcal{P}_2$ 中的任一边同出现在类型 C 中. 这就得到了必要性.

反之，根据 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 所满足的性质，那些权为 1 的边的两端只能分别属于 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$, 故它们形成 $Aux_1(G)$ 的一个 1- 上边缘. 由定理 5.4.2 中的 (4) 即得充分性. ▯

对于两条上树边 $\alpha, \beta \in Tod^*$, 用 $\alpha \ \mathrm{Sam}_0 \ \beta$ 表示它们同在一个类型 C 中和用 $\alpha \ \mathrm{Dif}_0 \ \beta$ 表示它们同在一个类型 A, 或类型 B 中. 当然， Sam_0 和 Dif_0 均具有对称性. 则，引理 7.3.1 建议我们将 Sam_0 和 Dif_0 延伸到那些尚未定这些关系的上树边对上而成为 Sam 和 Dif 使得满足如下的准则：

准则 1 $(\alpha \ \mathrm{Dif} \ \beta) \wedge (\beta \ \mathrm{Dif} \ \gamma) \Rightarrow \alpha \ \mathrm{Sam} \ \gamma$;

准则 2 $(\alpha \ \mathrm{Sam} \ \beta) \wedge (\beta \ \mathrm{Sam} \ \gamma) \Rightarrow \alpha \ \mathrm{Sam} \ \gamma$;

准则 3 $(\alpha \ \mathrm{Dif} \ \beta) \wedge (\beta \ \mathrm{Sam} \ \gamma) \Rightarrow \alpha \ \mathrm{Dif} \ \gamma$.

对于两条上树边 $\alpha, \beta \in Tod^*$, 可能会产生这样的情形：一方面得到 $\alpha \ \mathrm{Dif} \ \beta$ 而另一方面却又得到 $\alpha \ \mathrm{Sam} \ \beta$. 如果对任何一对上树边均不出现这种情形，则称这二个关系为在 Tod^* 上适定的.

引理 7.3.2 在一个图 $G = (V, E)$ 上，对于确向树 Tod 的所有上树边可以划分为如引理 7.3.1 所描述的二类 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$,

当且仅当 Dif 和 Sam 在 Tod^* 上是适定的.

证 记 $\widetilde{Aux_1}(G)$ 为在 $Aux_1(G)$ 上添加所有那些边使得代表其二端的上树边满足 Dif 或者 Sam. 由引理 7.3.1 和定理 5.4.2, 只需要证明 $Aux_1(G)$ 上有奇权圈, 当且仅当在 $\widetilde{Aux_1}(G)$ 上有奇权圈. 事实上, 准则 1–3 不会产生新的奇权圈 (只要 $Aux_1(G)$ 不含奇权圈) 和绝不会减没奇权圈 (若 $Aux_1(G)$ 有奇权圈). 从而, 引理得证. ▮

定理 7.3.1 一个图 $G=(V,E)$, 若 $*\prec$ 为由确向树所确定的定义在 Tod^* 上的一个基本序, 则 G 是可平面的当且仅当在 G 中没有如下构形 1–5 中的一个:

构形 1 $\exists\alpha,\beta\in Tod^*(\alpha *\prec \beta)$,

$$(\alpha\ \mathrm{Dif}_0\beta)\wedge(\alpha\ \mathrm{Sam}_0\beta);$$

构形 2 $\exists\alpha,\beta,\gamma\in Tod^*(\alpha *\prec \beta *\prec \gamma)$,

$$(\alpha\ \mathrm{Dif}\ \beta)\wedge(\beta\ \mathrm{Dif}\ \gamma)\wedge(\alpha\ \mathrm{Dif}\ \gamma);$$

构形 3 $\exists\alpha,\beta,\gamma\in Tod^*(\alpha *\prec \beta *\prec \gamma)$,

$$(\alpha\ \mathrm{Sam}\ \beta)\wedge(\beta\ \mathrm{Sam}\ \gamma)\wedge(\alpha\ \mathrm{Dif}\ \gamma);$$

构形 4 $\exists\alpha,\beta,\gamma\in Tod^*(\alpha *\prec \beta *\prec \gamma)$,

$$(\alpha\ \mathrm{Dif}\ \beta)\wedge(\beta\ \mathrm{Sam}\ \gamma)\wedge(\alpha\ \mathrm{Sam}\ \gamma);$$

构形 5 $\exists\alpha,\beta,\gamma\in Tod^*(\alpha *\prec \beta *\prec \gamma)$,

$$(\alpha\ \mathrm{Sam}\ \beta)\wedge(\beta\ \mathrm{Dif}\ \gamma)\wedge(\alpha\ \mathrm{Sam}\ \gamma).$$

证 由引理 7.3.1-2, 若 G 是可平面的, 则 Dif 和 Sam 为适定的. 假若构形 1–5 中之一出现, 则 Dif 和 Sam 就不可能是

适定的. 因为这时必出现两个上树边同时满足 Dif 和 Sam. 从而，必要性得证.

反之，Dif 和 Sam 必皆适定. 若不然，下面两种情形之一必发生.

情形 1 $\exists\alpha,\beta\in Tod^*$, $(\alpha\ \mathrm{Dif}_0\ \beta)\wedge(\alpha\ \mathrm{Sam}_0\ \beta)$ 这就是构形 1. 与前提条件矛盾.

情形 2 $\exists\alpha,\beta\in Tod^*$, $(\alpha\ \mathrm{Dif}\ \beta)\wedge(\alpha\ \mathrm{Sam}\ \beta)$. 由上面的准则，必存在 $\gamma\in Tod^*$, $\gamma*\prec\alpha*\prec\beta$, $\alpha*\prec\gamma*\prec\beta$, 或者 $\alpha*\prec\beta*\prec\gamma$, 不妨假设 $\alpha*\prec\beta*\prec\gamma$, 使得构形 2–5 中之一出现. 又与前提条件矛盾.

从而，由引理 7.1.2 和引理 7.1.1, 充分性得证. □

虽然这个定理本身已经允许我们建立一个线性算法以判定图的平面性而不必考虑平面性辅助图. 人们也许仍然要问是否有一类平面性辅助图使得它的度只受限于原图 G 的阶的一个线性函数. 下面，我们就引入所谓 **平面性 2– 辅助图**, 记为 $Aux_2(G)$ 并且证明它的度以 G 的阶的某个线性函数为上界.

引理 7.3.3 令 $s=(u,v)$, $t=(u,w)$ 为从 u 发出的两条边. 记

$$\begin{cases} E(s,Tod^*)=\{\alpha|\forall\alpha\in Tod^*, \\ \qquad\qquad (h(\alpha)\prec u)\wedge(v\preceq t(\alpha)\}; \\ E(t,Tod^*)=\{\alpha|\forall\alpha\in Tod^*, \\ \qquad\qquad (h(\alpha)\prec u)\wedge(w\preceq t(\alpha)\}. \end{cases} \tag{7.3.1}$$

其中，Tod 为 G 上的一个确向树并确定一个偏序集 $(V,\preceq)$. 如

果

$$\min\{h(\alpha)|\forall\alpha \in E(t, Tod^*)\} \prec \min\{h(\alpha)|\forall\alpha \in E(s; Tod^*)\},$$

则对于可平面图，有

$$\begin{cases} \forall\alpha, \beta \in E(s, Tod^*), & \alpha\ \overline{\text{Dif}}\ \beta; \\ \forall\alpha, \beta \in E(t, Tod^*), & \alpha\ \text{Sam}\ \beta. \end{cases} \tag{7.3.2}$$

证 设 $E(s; Tod^*) = \{\alpha_i \in Tod^*|\forall i,\ 1 \le i \le k,\ h(\alpha_1) \preceq \cdots \preceq h(\alpha_k) \prec u\}$ 和 $E(t; Tod^*) = \{\beta_j \in Tod^*|\forall j,\ 1 \le j \le l,\ h(\beta_1) \preceq \cdots \preceq h(\beta_k) \prec u\}$. 则，由已知条件，有 $\alpha_1 \prec \beta_1$. 先证 (3.7.2) 中的后一说法. 如果 $l = 1$, 即 $E(t; Tod^*) = \{\beta_1\}$, 则 β 本身可视为 β Sam β. 此说法为真. 对 l 用归纳法. 设对于

$$E(t, Tod^*) = \{\beta_2, \beta_2, \cdots, \beta_l\}$$

后一说法成立. 则可分如下二种情形讨论.

情形 1 若 $\neg\alpha \in E(t, Tod^*)$, $h(\beta_1) \prec h(\alpha) \prec h(\beta_2)$, 则由于 $h(\alpha_1) \prec h(\beta_1)$, β_1 和 β_2 必同出现在类型 C 中 (引理 5.4.7 中所定义). 故，β_1 Sam_0 β_2. 由归纳假设可知这一说法为真.

情形 2 否则, 设 $h(\beta_1) \prec h(\alpha_{i_1}) \preceq h(\alpha_{i_1+1}) \cdots \preceq h(\alpha_{i_1+s}) \prec h(\beta_2)$. 由引理 5.4.7-8, 有

$$\beta_1\ \text{Dif}\ \alpha_{i_1}\ \text{Sam}\ \alpha_{i_1+1}\ \text{Sam}\ \cdots\ \text{Sam}\ \alpha_{i_1+s}\ \text{Dif}\ \beta_2.$$

由前述的准则 1–3, 对于可平面图有 β_1 Sam β_2. 这一说法仍为真.

综上情形 1 和情形 2, (7.3.2) 的后一说法得证.

另一方面，若 $h(\alpha_1) \preceq h(\alpha_2) \preceq \cdots \preceq h(\alpha_i) \preceq h(\beta_1)$ 和 $h(\beta_1) \prec h(\alpha_{i+1})$, 则由引理 5.4.7-8 可知

$$\alpha_1 \ \overline{\text{Dif}} \ \alpha_2 \ \overline{\text{Dif}} \ \cdots \ \overline{\text{Dif}} \ \alpha_i.$$

又，由 (7.3.2) 的后一说法，有

$$\alpha_{i+1} \ \text{Sam} \ \alpha_{i+2} \ \text{Sam} \ \cdots \ \text{Sam} \ \alpha_k.$$

从而， (7.3.2) 的前一个说法得证. ♮

根据引理 7.3.3, 若存在 $\alpha \in E(s; Tod^*)$ 和 $\beta \in E(t, Tod^*)$ 使得

$$\alpha \ \text{Dif}_0 \ \beta \quad 或者 \ \alpha \ \text{Sam}_0 \ \beta,$$

则分别定义 s 和 t 满足关系

$$s \ \text{Dif} \ t \quad 或者 \ s \ \text{Sam} \ t.$$

对于图 $G = (V, E)$, 令

$$A(v; Tod) = \{e | \forall e \in E_v, v \to e\}, \tag{7.3.3}$$

其中 $v \to e$ 表示 e 的方向为由 v 发出的. 若 G 是可平面的，则由引理 7.3.2-3, 对任何 $v \in V$, 关系 Dif 和 Sam 在 $A(v; Tod)$ 上是适定的. 这样，对于平面性，同样地或平面嵌入，只要讨论那些具有此性质的图就够了. 这种图被称为*平面性可取的*.

在每一个节点 $v \in V$ 处，我们可以在 $A(v; Tod)$ 上规定一个线性序. 对于任何 $a, b \in A(v; Tod)$, 用 $a | \prec b$ 表示在这个线性序之下 a 被 b 所覆盖. 令 $\hat{A}$, $\hat{B}$ 或 $\hat{C}$ 分别这样的类型 A, 类型 B, 或类型 C 如引理 5.4.7 中所定义使得与它们关联的树变量相应的二边在公共节点处依那个线性序一个覆盖另一个. 进而，令

$(\alpha,\beta)\subset\hat{A},\hat{B}$, 或 $\hat{C}$ 表示 (α,β) 分别同出现在 $\hat{A},\hat{B}$, 或 $\hat{C}$ 中. 则，对于图 $G=(V,E)$, 由其上一个确向树 Tod 确定一个偏序集 $(V,\preceq)$, 我们可以按如下方式构造它的一个称之为平面性 2-辅助图, 用 $Aux_2(G)=(V_{au}^2,E_{au}^2)$ 表示：

$$\begin{cases} V_{au}^2=V_{an}^1; \\ E_{au}^2=\{(y_\alpha,y_\beta)\in E_{au}^1|\forall(\alpha,\beta)\subset\hat{A},\hat{B},\text{ 或 }\hat{C}\}. \end{cases} \tag{7.3.4}$$

相仿地， E_{au}^2 中之边 (y_α,y_β) 具有权 $w(y_\alpha,y_\beta)=1$ 或 0 分别由 $(\alpha,\beta)\subset\hat{A},\hat{B}$ 或 $(\alpha,\beta)\subset\hat{C}$ 所确定. 并且，令

$$\mathcal{A}_1^2(G;Tod^*)=\{e|\forall e\in E_{au}^2,\ w(e)=1\}.$$

定理 7.3.2　对一个图 (当然，平面性可取的)$G=(V,E)$, Tod 为其上的一个确向树，下面的说法是相互等价的：

(1)　G 是可平面的；

(2)　$Aux_2(G)$ 无奇权圈；

(3)　$Aux_2(G)$ 无奇权圈基本图；

(4)　$\mathcal{A}_1^2(G;Tod^*)$ 形成 $Aux_2(G)$ 的一个 1- 上边缘；

(5)　$Aux_2(G)$ 是平衡的.

证　与定理 5.4.1 的证明相仿.　♮

一般而言，正如上面所讨论的，可知 $Aux_2(G)\subseteq Aux_1(G)$. 然而，若 G 是 3- 正则的，则有 $Aux_2(G)=Aux_1(G)$.

引理 7.3.4　若 G 是 3- 正则的，Tod 为其上的一个确向树(这里，不必是路), 则

$$\varepsilon(Aux_2(G))\le\frac{3\nu(G)}{2}-3\nu_3(Tod)+1. \tag{7.3.5}$$

其中， $\nu_3(Tod) = |\{v|\forall v \in V, \rho_{Tod}(v) = 3\}|$.

证 令 $(V_{au}^2, *\prec)$ 为由 (5.4.6) 式确定的基本序所导出的偏序集. 因为 Tod 一般不是路，这里 $*\prec$ 不一定是线性序. 记 $\hat{A}_0(G;Tod^*)$ 和 $\hat{A}_1(G;Tod^*)$ 分别为由 (5.4.8) 和 (5.4.9) 以 $\hat{A}, \hat{B}$ 和 $\hat{C}$ 代替 A, B 和 C 所确定的. 自然， $\hat{A}_i(G;Tod^*) = A_i^2(G;Tod^*)$, $i = 1, 2$. 令

$$\hat{A}_{0s}(G;Tod^*) = \{ (y_\alpha, y_\beta)|\forall (y_\alpha, y_\beta) \in \hat{A}_0(G;Tod^*),$$

$$y_\alpha *|\prec y_\beta\} \tag{7.3.6}$$

和 $\hat{A}_{0n} = \hat{A}_0(G;Tod^*) - \hat{A}_{0s}(G;Tod^*)$. 其中， $*|\prec$ 表示与 $*\prec$ 相应的覆盖关系. 则我们有

$$E_{au}^2 = \hat{A}_{0s}(G;Tod^*) + \hat{A}_{0n}(G;Tod^*) + \hat{A}_1(G;Tod^*). \tag{7.3.7}$$

根据上面提到的同样的理由，有

$$\begin{cases} |\hat{A}_{0s}(G;Tod^*)| \leq |\mathcal{Y}_G(T)|; \\ |\hat{A}_1(G;Tod^*)| \leq |\mathcal{X}_G(T)|. \end{cases} \tag{7.3.8}$$

其中，$\mathcal{X}_G(T)$ 和 $\mathcal{Y}_G(T)$ 分别为 G 的树变量和上树变量的集合.

而且，也可定义一个映象 $\tau : \hat{A}_{0n}(G;Tod^*) \to \mathcal{X}_G(T)$ 使得

$$\tau(y_\alpha, y_\beta) = x_\xi.$$

其中之 ξ, 由如下的关系所确定：

$$t(\xi) = \max\{t(\eta)|\forall \eta \in Tod^*, \ h(\alpha) \prec h(\eta) \prec h(\beta)\}. \tag{7.3.9}$$

由于可以看出，在由 Tod 所确定的偏序集 $(V, \preceq)$ 上，有 $t(\xi) \preceq v_{\alpha,\beta} = \langle t(\alpha), t(\beta)\rangle = t(\alpha) \wedge t(\beta)$. 从 G 的 3- 正则性，即可得知 τ

是一个单射. 这就意味

$$|\hat{\mathcal{A}}_{0n}(G;Tod^*)| \le |\mathcal{X}_G(T)| - \nu_3(Tod). \tag{7.3.10}$$

又, 由于 $\varepsilon(Tod^*) = \frac{3}{2}\nu(G) - \nu(G) + 1 = \frac{\nu(G)}{2} + 1$, 有

$$\begin{cases} |\mathcal{Y}_G(T)| = \dfrac{\nu(G)}{2} - 1; \\ |\mathcal{X}_G(T)| \le \dfrac{\nu(G)}{2} - \nu_3(Tod) + 1. \end{cases} \tag{7.3.11}$$

最后, 由 (7.3.6-10), 有

$$\varepsilon(E^2_{au}) \le |\mathcal{Y}_G(T)| + 2|\mathcal{X}_G(T)| - \nu_3(Tod).$$

进而由 (7.3.11), 即得引理. □

令 $G=(V,E)$ 是一个平面性可取的图. 下面, 我们将引进两类运算以便将 G 转变为一个 3- 正则图 $\tilde{G}$ 使得 $\tilde{G}$ 是可平面的当且仅当 G 是可平面的.

首先, 对于 $\alpha \in Tod^*$ ($h(\alpha)=v$, $u \preceq t(\alpha)$, $a=(v,u)\in E_v$ 和 $\rho(v) \ge 4$), 将 v 劈分为 $v'(=v)$ 和 $v''(\succeq v')$ 使得 a 和所有 $\beta \in Tod^*$ ($h(\beta)=v$ 和 $u \prec t(\beta)$) 与 v'' 关联. 这种运算被称为 伸长v. 若 $\rho(v'')>3$, 继续伸长 v'' 直到所有 $h(\beta)$ 皆为 3- 次的. 然后, 当没有一个上树边指向一个次大于 3 的节点, 则对于次大于 3 的节点 v, 即 $s=|A(v;Tod)|\ge 3$, 劈分为 $v_1, v_2, \cdots, v_{s-1}$ 使得

$$v_i | \prec v_{i+1} \Leftrightarrow \gamma(a_s;v) \le \gamma(a_{i+1};v) \preceq \gamma(a_i;v), \tag{7.3.12}$$

$i=1,2,\cdots,s-2$. 其中

$$\gamma(a_i;v) = \min\{h(\beta) | \forall \beta \in Tod^*, t(\beta) \preceq h(a_i)\}, \tag{7.3.13}$$

$a_i \in A(v;Tod)$, $1 \le i \le s$. 进行这种运算直到不能继续为止所得的图，记为 $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$, 被称为 G 的 伸长图. 当然，Tod 连同所有附加的边 (v', v'') 和 (v_i, v_{i+1}) 就形成了 $\tilde{G}$ 上的确向树，也用 $\widetilde{Tod}$ 表示. 这就使得我们能够对于平面性可取的图 G 用 $(\tilde{V}, \preceq)$ 定义另一个偏序集 $(\mathcal{X}_G, \prec *)$ 如下：$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}_G(T)$,

$$x_1 \preceq * x_2 \Leftrightarrow \tilde{v}(x_1) \preceq \tilde{v}(x_2), \tag{7.3.14}$$

其中，$\tilde{v}(x)$ 为 G 上与树变量 $x \in \mathcal{X}_G(T)$ 关联的节点. 由于 3-正则性，有一个从树变量到 $\widetilde{Tod}$ 的内节点 (非显节点) 的一个单射. 基于 $(\mathcal{X}_G(T), \preceq *)$, 在每个节点 $v \in V$ 处，$A(v, Tod)$ 上的一个线性序也可以被确定. 在下面的讨论中，总是假定平面性 2- 辅助图 $Aux_2(G)$ 与 G 的每个节点处的这个线性序相伴.

引理 7.3.5 一个图$G = (V, E)$(当然，平面性可取的)是可平面的，当且仅当它的伸长图是可平面的.

证 因为容易验证

$$Aux_2(G) \subseteq Aux_2(\tilde{G}), \tag{7.3.15}$$

充分性是显然的. 反之，由引理 7.3.1 知 G 的所有上树边可以划分为二类具有特定的性质，而且，由引理 7.3.2-3, 这又导致在 $\tilde{G}$ 上所有上树边的带同样性质的划分. 再由引理 7.3.1 可知 $\tilde{G}$ 也必为可平面的. 这就得到了必要性. ♮

定理 7.3.3 对任何平面性可取的图 $G(V, E)$, Tod 为其上的一个确向树，有

$$\varepsilon(Aux_2(G) \le 6\nu(G) - 3\nu_1(Tod) - 11. \tag{7.3.16}$$

其中，$\nu_1(Tod)$ 为 Tod 上的显节点的数目.

证 因为除了 $\widetilde{Tod}$ 上的悬节点和 3- 次节点外每个节点都恰与一条上树边关联，有

$$\nu(\tilde{G}) = 2\varepsilon(\widetilde{Tod}^*) + \nu_3(\widetilde{Tod}) - \nu_1(\widetilde{Tod}). \qquad (7.3.17)$$

由关系 $\nu_1(\widetilde{Tod}) = \nu_1(Tod)$, $\nu_3(\widetilde{Tod}) = \nu_1(\widetilde{Tod}) - 2$ 和 $\varepsilon(\widetilde{Tod}^*) = \varepsilon(G) - \nu(G) + 1$ 可得

$$\nu(\tilde{G}) = 2(\varepsilon(G) - \nu(G) + 1) - 2 \le 2(2\nu(G) - 6). \qquad (7.3.18)$$

这里的不等式是考虑到对于平面性只需限定 G 至多有 $3\nu(G)-6$ 条边. 由引理 7.3.4, 有

$$\begin{aligned}\varepsilon(Aux_2(\tilde{G})) &\le \frac{3}{2}(2(2\nu(G) - 6)) - 3\nu_3(\widetilde{Tod}) + 1\\ &= 3(2\nu(G) - 6) - 3\nu_1(Tod) + 7\\ &= 6\nu(G) - 3\nu_1(Tod) - 11.\end{aligned}$$

从而，由引理 7.3.5 和 (7.3.15) 即得定理. ♮

§7.4 平面嵌入的数目

设图 $G = (V, E)$, 在其上给定一个确向树 Tod, 根据上一节所讨论的已判定它是可平面的. 令 $Aux_2(G) = (V_{au}^2, E_{au}^2)$ 为 G 的平面性 2- 辅助图. 在 $Aux_2(G)$ 上造一个方程组

$$y_\alpha + y_\beta = \begin{cases} 0, & 当\ (y_\alpha, y_\beta) \in \hat{A}_0(G; Tod^*); \\ 1, & 当\ (y_\alpha, y_\beta) \in \hat{A}_1(G; Tod^*). \end{cases} \qquad (7.4.1)$$

其中， $\hat{A}_0(G; Tod)$ 和 $\hat{A}_1(G; Tod^*)$ 由 (7.3.6-7) 所定义.

从定理 7.3.2 和定理 5.3.3, 方程 (7.4.1) 有解.

引理 7.4.1　方程 (7.4.1) 至少有两组解. 且它恰有二组解, 当且仅当 $Aux_2(G)$ 是连通的.

证　若 $Z = \{z_\alpha | \forall\alpha \in Tod^*\}$ 为方程 (7.4.1) 的一组解, 则 $\bar{Z} = \{\bar{z}_\alpha | \forall\alpha \in Tod\}$ 也是它的一组解. 其中,

$$\bar{z}_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{当 } z_\alpha = 1; \\ 1, & \text{当 } z_\alpha = 0. \end{cases}$$

当然, $\bar{Z} \neq Z$. 这就得到定理的前一个结论.

对后一结论, 因为如若 $Aux_1(G)$ 不连通, 方程 (7.4.1) 至少有四组解. 从而, 必要性显然. 充分性可以由下述事实直接导出. 若将某变量 y_α 固定取为 0 或 1, 则方程 (7.4.1) 沿 $Aux_2(G)$ 上的一个树是适定的. 而且, 由 (7.4.1) 的相容性这个唯一解可扩展到 (7.4.1) 中的所有方程. 以及由连通性, 在 $Aux_2(G)$ 上存在一个树. ▯

若 $g_1(G)$ 和 $g_2(G)$ 为图 $G = (V, E)$ 的两个平面嵌入, 因为它们均为平面的多面形. 由对偶性可知, $g_1(G) \cong g_2(G)$, 或者说拓扑等价, 当且仅当存在一个双射 $\tau : g_1(E) \to g_2(E)$ 使得

$$\forall v \in V, \varrho(g_1(v); g_1(G)) = \varrho(\tau(g_1(v)); g_2(G)) \tag{7.4.2}$$

或者

$$\forall v \in V, \varrho(g_1(v); g_1(G)) = \varrho^{-1}(\tau(g_1(g)); g_2(G). \tag{7.4.3}$$

其中 $\varrho(g_1(v); g_1(G))$ 为在 $g_1(G)$ 中 $g_1(v)$ 处 $\{g_1(e) | \forall e \in E_v\}$ 的旋和 ϱ^{-1} 为如 §2.1 中定义的旋 ϱ 的逆.

令 Tod 为 G 上的一个确向树. 为方便, 我们可以想象用 O 表示的根被劈分为一条边 (O_{-1}, O). 当然, 此边在所得图的

相应确向树上. 并且, 只有一条上树边与 O_{-1} 关联, 记之为 α_{-1} 使 $t(\alpha_{-1})$ 在所有与 O 关联的上树边中在 $(V,\preceq)$ 之下为极大的. 这时, 除 α_{-1} 外, 所有其它的上树边都在 $\mathcal{Y}_G(T)$ 中有相应的变量. 并称它们为 *活动的*.

令 $\mathcal{A}_{ct}(G;Tod)$ 为所有活动的边的集合, 或者说, $\mathcal{A}_{ct}(G;Tod) = \{\alpha|\forall\alpha\in Tod^*,\ \alpha\neq\alpha_{-1}\}$. 进而, 对于平面嵌入 $g=g(G)$, 令 $\mathcal{R}(Tod;g)$ 和 $\mathcal{L}(Tod;g)$ 分别表示那些右和左活动边的集合. 所谓 *右* 或 *左* 边指当沿 Tod 从其首到尾在此二端附近的此边上的点落在右或左手一侧. 自然, 对于 G 的一个平面嵌入 g, 有

$$\mathcal{A}_{ct}(G;Tod)=\mathcal{R}(Tod;g)+\mathcal{L}(Tod;g). \qquad (7.4.4)$$

定理 7.4.1 若 g 是图 $G=(V,E)$ 的一个平面嵌入, Tod 为其上一个确向树, 则

$$y_\alpha=\begin{cases} c, & 当\ \alpha\in\mathcal{R}(Tod;g); \\ \bar{c}, & 当\ \alpha\in\mathcal{L}(Tod;g) \end{cases} \qquad (7.4.5)$$

对于 $\alpha\in\mathcal{A}_{ct}(G;Tod)$ 是方程 (7.4.6) 的一组解. 反之, 若对一个图 $G=(V,E)$, Tod 为其上确向树, 且方程 (7.4..1) 有一组解: $\forall\alpha\in\mathcal{A}_{ct}(G;Tod)$,

$$y_\alpha=\begin{cases} c, & 当\ \alpha\in\mathcal{B}_0(G;Tod); \\ \bar{c}, & 当\ \alpha\in\mathcal{B}_1(G;Tod). \end{cases} \qquad (7.4.6)$$

自然, $\mathcal{A}_{ct}(G;Tod)=\mathcal{B}_0(G;Tod)+\mathcal{B}_1(G;Tod)$, 则 G 只有一个平

面嵌入 g 使得

$$\begin{cases} \mathcal{B}_0(G;Tod) = \mathcal{R}(G;Tod); \\ \mathcal{B}_1(G;Tod) = \mathcal{L}(G;Tod). \end{cases} \tag{7.4.7}$$

证 因为 g 是图 G 的一个平面嵌入，对于 $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_{ct}(G;Tod)$，若 $(y_\alpha, y_\beta) \in \hat{\mathcal{A}}_1(G;Tod^*)$，即 α 和 β 同出现在 $\hat{A}$ 或 $\hat{B}$ 中，则 α 和 β 必处在不同的侧：$\mathcal{R}(Tod;g)$ 和 $\mathcal{L}(Tod;g)$. 从而，

$$y_\alpha = c \text{ 和 } y_\beta = \bar{c}, \quad \text{或者 } y_\alpha = \bar{c} \text{ 和 } y_\beta = c.$$

对此二情形，均满足方程

$$y_\alpha + y_\beta = c + \bar{c} = 1.$$

否则，若 $(y_\alpha, y_\beta) \in \mathcal{A}_0(G;Tod^*)$，即 α 和 β 必落在同侧：$\mathcal{R}(Tod;g)$ 或 $\mathcal{L}(Tod;g)$. 从而，

$$y_\alpha = y_\beta = c, \quad \text{或者 } y_\alpha = y_\beta = \bar{c}$$

均满足方程

$$y_\alpha + y_\beta = c + c = \bar{c} + \bar{c} = 0.$$

因此，(7.4.5) 为方程 (7.4.1) 的一组解.

反之，根据 (7.4.6) 依如下的方式构造 G 的一个平面嵌入使得满足 (7.4.7). 对于 $v \in V$，令 t_v 为那条指向 v 的树边和 $t_i, 1 \le i \le l$, $s_i, 1 \le i \le k$, 为所有那些从 v 发出的边使得上树边 $\alpha = t_i$，或者 $h(t_i) \preceq t(\alpha)$, $\alpha \ne t_i$, $1 \le i \le l$, $h(\alpha) \prec v$, 均有 $\alpha \in \mathcal{B}_0(G;Tod)$ 和上树边 $\beta = s_i$，或者，$h(s_i) \preceq t(\beta)$, $\beta \ne s_i$, $1 \le i \le k$, $h(\beta) \prec v$, 均有 $\beta \in \mathcal{B}_1(G;Tod)$. 则，有

$$(t_v t_1 \cdots t_l s_k s_{k-1} \cdots s_1) \subseteq \varrho(v;g) \tag{7.4.8}$$

当且仅当

$$\begin{cases} \gamma(t_l) \preceq \gamma(t_{l-1}) \preceq \cdots \preceq \gamma(t_1); \\ \gamma(s_k) \preceq \gamma(s_{k-1}) \preceq \cdots \preceq \gamma(s_1). \end{cases} \tag{7.4.9}$$

其中，对于 $x = t_1, t_2, \cdots, s_1, s_2, \cdots$,

$$\gamma(x) = \begin{cases} h(x), \text{ 当 } x \in Tod^*; \\ (h(\alpha_1), h(\alpha_2), \cdots), \text{ 否则}. \end{cases}$$

这里，$\alpha_1 * \prec \alpha_2 * \prec \cdots$ 和

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\} = \{\alpha | \forall \alpha \in Tod^*, h(x) \preceq t(\alpha), h(\alpha) \prec v\}.$$

进而，对于任何 $x = t_i \in Tod$, $1 \le i \le l$, 或 $x = s_i \in Tod$, $1 \le i \le k$, 设 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s\} = \{\xi | \forall \xi \in B_0(G; Tod), (h(x) \preceq t(\xi)) \wedge (h(\xi) = v)\}$, $t(\xi_1) \succeq t(\xi_2) \succeq \cdots \succeq t(\xi_s)$ 和 $\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r\} = \{\eta | \forall \eta \in B_1(G; Tod), (h(x) \preceq t(\eta)) \wedge (h(\eta) = v)\}$, $t(\eta_1) \preceq t(\eta_2) \preceq \cdots \preceq t(\eta_r)$. 则，

$$\langle \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_s x \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_r \rangle \subseteq \varrho(v; g). \tag{7.4.10}$$

即为 v(或 $g(v)$) 处之旋中的一段. 当然，由定理 7.3.1-2, 对于一个可平面图，上面的作法总能完成. 并且，由 Jordan 定理可知所得到的确为一个平面嵌入 g 满足 (7.4.7). ▮

从引理 7.4.1, 允许我们称方程 (7.4.1) 的一组解和它的补为其解的 合对. 令 $S(G; Tod)$ 为方程 (7.4.1) 的解的所有合对的集合.

引理 7.4.2 对于图 $G = (V, E)$, 确向树 Tod 在一个 Hamilton 圈上，有 $|S(G; Tod)|$ 与 Tod 的选择无关和 $|S(G; Tod)|$ 就是

G 的不同平面嵌入的数目.

证 因为在这里, $Aux_2(G) = Aux_1(G)$, 无需假定平面性的可取性而只就 $Aux_1(G)$ 而论即足. 并且, 由定理 7.4.1 可知每一个活动的边只能落在相应 Hamilton 圈的闭曲线的内部, 或外部区域. 根据类型 A, B, 或 C 的定义, 活动的边之上述的一个状态恰与在方程 (7.4.1) 的解中相应的变量取值为 0 或 1 一致. 因此, 由上面所说的和将在 §11.1-2 中看到的可知方程 (7.4.1) 的解中合对的数目 $|S(G;Tod)|$ 不依赖 Tod 的选择而且它就是 G 的不同平面嵌入的数目. ▯

定理 7.4.2 对于图 $G = (V, E)$ 有一个确向树 Tod 在 Hamilton 圈上, 它的不同平面嵌入的数目为

$$\eta_{pe}(G) = 2^{c(Aux_1(G))-1} \tag{7.4.11}$$

其中 $c(Aux_1(G))$ 为 $Aux_1(G)$ 中连通片的数目.

证 由引理 7.4.2 知 $|S(G;Tod)|$ 在这里不依赖 Tod 的选择. 而且, 由引理 7.4.1 知

$$|S(G;Tod)| = 2^{c(Aux_1(G))-1}$$

从而, 由引理 7.4.2 意味 $\eta_{pe}(G) = |S(G;Tod)|$, 即得定理. ▯

如果图 G 不是 Hamilton 图, 我们必需考虑一个劈对与至少三个基本劈块关联的情形. 然, 在 Hamilton 的情形, 由于无重边, 这种情况不必考虑. 在这时, 若有一个劈对与三个基本劈块关联则必有一个基本劈块仅由一条不在 Hamilton 圈上的边组成. 这条边本身就相应 $Aux_1(G)$ 的一个连通片. 事实上, 它只是 $Aux_1(G)$ 的一个孤立节点. 一般地, 由 §4.3 中所讨论的, 可以只讨论简单 2- 可分离的平面图而不失一般性. 因为

任何简单 2- 可分离的情形绝不会有一个基本劈块仅由一条边组成, $\alpha_{Bl}(G)$(如 §4.3 中所定义) 即变为基本劈块的数目.

引理 7.4.3 一个图 G, Tod 为它的一个确向树, 是 3- 连通的(非 2- 可分离的), 当且仅当 $Aux_1(G)$ 是连通的.

证 设 G 是 3- 连通的但 $Aux_1(G)$ 并不连通. 由引理 7.4.1, 对于 $Aux_1(G)$ 的方程 (7.4.1) 的解, 至少有两个合对. 然, 由定现 7.4.1, G 至少有两个不同的一平面嵌入. 这就与定理 4.3.3 矛盾. 从而, 必要性成立.

反之, 若 $Aux_1(G)$ 是连通的, 则由引理 7.4.1, 对于 $Aux_1(G)$ 的方程 (7.4.1) 的解中恰有一个合对. 进而, 由定理 7.4.1, 按照 (7.4.7) 的方式只有一个平面嵌入. 因此, 由定理 4.3.3, G 必为 3- 连通的. 充分性得证. ♮

如果 G 是 2- 可分离的, 则可能会有一个劈对 $\{u,v\}$ 至少与三个劈块关联, 而且它们中没有一个是由一条边组成. 然而, $Aux_1(G)$ 不依赖在一个劈对处劈块的循环次序的选择. 而这种循环次序却是由平面嵌入唯一决定的. 或者说不同的循环次确定了不同的平面嵌入. 从而, 在一般的情形下, 对于 $Aux_1(G)$ 的方程 (7.4.1) 的解的合对不再唯一地引出 G 的一个平面嵌入.

引理 7.4.4 对于任何一个不可分离图 G(当然, 简单 2- 可分离的), Tod为其上的一个确向树, $Aux_1(G)$ 是不连通的当且仅当 G 至少有一个劈对. 所有相应在 $Aux_1(G)$ 的同一连通片上的节点的上树边在 G 的同一个基对劈块之中. 两个相应 $Aux_1(G)$ 的不同连通片上的节点在 G 的不同的基本劈块中.

证 引理的第一个结论实际上是引理 7.4.3 的另一个说法. 因此为真.

假设 α 和 β 是二个上树边而且分别在 G 的劈块 A 和 B

中. 如果 y_α 与 y_β 在 $Aux_1(G)$ 中是连通的, 则有一条路 $P(y_\alpha, y_\beta)$ 在 $Aux_1(G)$ 中. 不妨取这样的 α 在 A 中和 β 在 B 中使得路 $P(y_\alpha, y_\beta)$ 为最短. 由 A 和 B 选择之任意性, 路 $P(y_\alpha, y_\beta)$ 只能是一条边. 若 α 和 β 同在类型 C 中, 即 α Sam_0 β. 由于简单 2- 可分离性, 从定理 7.4.1 依 §4.3 中所定义的将 A 反射可得 G 的另一个平面嵌入使得它所确定的对于 $Aux_1(G)$ 的方程 (7.4.1) 的解与原来的之间 y_α 的值改变了但 y_β 的值不变. 这样, 就有 α Dif β 与 α Sam_0 β 矛盾. 相仿地, 我们也可以证明不可能有 α Dif_0 β. 从而, y_α 和 y_β 不可能在 $Aux_1(G)$ 的同一连通片中. 这就证明了第二个结论.

进而, 假设 $\alpha, \beta \in Tod^*$ $(y_\alpha, y_\beta \in V^1_{au})$ 在 G 的同一个基本劈块 A 中. 如果 y_α 和 y_β 在 $Aux_1(G)$ 中不连通, 则由定理 7.4.1 可以得到 G 的另一个平面嵌入使得 β 的状态改变了而 α 的则不变. 由定理 4.3.4, A 必需含有一个劈对. 这就与 A 是一个基本劈块矛盾. 从而, 只能 y_α 与 y_β 在 $Aux_1(G)$ 中连通. 第三个结果亦真. ♮

定理 7.4.3 对任一不可分离的可平面图G(当然, 简单 2- 可分离的), Tod为其上一确向树, G 的拓扑不等价的平面嵌入的数目为

$$\eta_{pe}(G) = 2^{c(Aux_2(G))-1} \tag{7.4.12}$$

证 因为 $Aux_2(G)$ 是连通的当且仅当 $Aux_1(G)$ 是连通的, 从引理 7.4.4 和定理 4.3.4 即得定理. ♮

更进一步, 这个定理可以引伸到一般的不可分离可平面图 G 无需是简单 2- 可分离的. 这时, G 的不同平面嵌入的数目为

$$\eta_{pe}(G) = 2^{\hat{c}(Aux_2(G))-1} \prod_{i\geq 1}((s_i - 1)!)^{l_i} \tag{7.4.13}$$

其中 $\hat{c}(Aux_2(G))$ 为 $Aux_2(G)$ 的除去所有那些特殊的孤立点之外的连通片的数目. 这里的所谓特殊是指每个孤立点对应的上树边的两端均形成 G 的一个劈对. 关于 s_i 和 l_i 的意义可在 §4.3 中得到. 在 §11.1-2 中也将会看到 (7.4.13) 的正确性.

§7.5 注记

7.5.1 关于 3- 正则可平面图的平面嵌入, 在 §7.1 中的讨论取自 [Liu 19]. 但, 公式 (7.1.1) 和 (7.1.2) 比原来的要清楚得多. 而且, 关于线性性的估计在那里第一次出现. 在这一章, 我们还看到了这一方法引伸到一些更一般的情形, 特别是确向树是路但不一定在 Hamilton 圈上的情形 [Sun1, Xu1].

7.5.2 平面性与平面嵌入的基本序表征首先在 [Liu23-25] 中研究的. 那里利用的是布尔的方法. 但所给出的禁用构形过于复杂. 不管怎样, 在 §7.3 中则大为简化. 而且这里还提供了关于线性性的更为具体的估计.

7.5.3 在 §7.4 中给出了确定一个图的不同平面嵌入数目的一般公式. 在 [Liu24] 中, 仅提供了 Hamilton 可平面图之情形.

7.5.4 如何表征平面性辅助图, 即使对一类特殊的如 3-正则的图仍然是一个公开的问题. 当然, 3- 正则的图对于确向树为路的平面性 0- 辅助图就是区间图 [Gol2].

第八章

纵横可嵌入性

§8.1 纵横嵌入

假设 G 已经确定为可平面的而且它的一个平面嵌入 $\mu(G)$ 也已给出. 我们现在的任务是判定可否将这个平面嵌入变换成另一个使得具有如下性质:

Rec.1 所有节点均在欧氏或仿射平面的格子点 (或者说整点) 上.

Rec.2 每一条边均为折线且由有限条水平和竖直线段组成, 或者在仿射的情形这个折线由有限条直线段组成且这些线段可分为二类每一类中的线段均与二个坐标轴之一平行.

Rec.3 无限面保持不变.

若 $\mu(G)$ 可变为这样的嵌入, 则称 $\mu(G)$ 为纵横可扩张的. 这种满足性质 Rec.1–3 的嵌入被称为 $\mu(G)$ 的纵横扩张. 一个图 G 的任何一个满足性质 Rec.1–2 的平面嵌入被称为它的纵横嵌

入, 也可以说是 G 的任何一个平面嵌入 $\mu(G)$ 的纵横嵌入. 如果 $\mu(G)$ 有一个面使得以它为无限面时 $\mu(G)$ 是纵横可扩张的则称 $\mu(G)$ 是*纵横可嵌入的*. 若不管取那一个面作为无限面, $\mu(G)$ 都是纵横可扩张的, 则称 $\mu(G)$ 是*纵横可实现的*. 进而, 若图 G 有一个平面嵌入是纵横可扩张的则称 G 是*纵横可嵌入的*. 若 G 的所有平面嵌入均为纵横可实现的, 则也称 G 本身是*纵横可实现的*. 当然, 不是任何的平面嵌入都是纵横可扩张的. 事实上, 若一个图 G 有一个节点次大于 4, 则它的任何平面嵌入均非纵横可扩张的. 理由是在任何纵横嵌入中, 每个节点只有四种可能的方式与其它节点连接. 记这四种方式为 N(北), W(西), S(南) 和 E(东).

在一个纵横嵌入中, 可以在一条边上有几个内点它们每个都与此边上的水平和竖直线段相遇. 这些点称为所在边上的*折*. 如果在一个纵横嵌入中, 在每一条边上的折均不超过 k, 则称它为 *k–嵌入*. 相仿地, 如果一个平面嵌入可以用一个 k– 嵌入表示使无限面保持不变, 则称它为 *k–可扩张的*. 若一个平面嵌入对于任何一个面作为无限面都是 k– 可扩张, 则称它为 *k–可实现的*. 进而, 如果一个图有一个 k– 嵌入, 则称它为 *k–可嵌入的*, 和同样地可知, *k–可实现的*.

引理 8.1.1 *若一个 3– 正则图 $G=(V,E)$ 有 Tod 为它的一个确向树且在一个 Hamilton 圈上, 则 G 的任何一个平面嵌入全是 3– 可扩张的.*

证 由于 G 是 3– 正则的, 有 $\nu=|V|=0 \pmod 2$. 因为除 Tod 的二个端点外, 其它每个节点都只与一个上树边关联. 但, 这二个端点的每个都与两个上树边关联. 从而, G 有 $\bar{\varepsilon}=\frac{\nu}{2}+1$ 条上树边. 设在 Tod 的右侧有 ε_1 条上树边, 则必有 $\varepsilon_2=\bar{\varepsilon}-\varepsilon_1$ 条上树边在 Tod 的左侧. 由定理 7.1.1, 在每一侧的

上树边，仅除那条在 Haimlton 圈上的上树边 α_0 外，均可用如下定义的等价关系 $\sim_p$ 分类：$\forall\alpha,\beta\in\mathcal{A}_0$(或 $\mathcal{A}_1$),

$$\alpha\sim_p\beta\Longleftrightarrow(h(\alpha)\prec h(\beta)\prec t(\beta)\prec t(\alpha)$$
$$\vee(h(\beta)\prec h(\alpha)\prec t(\alpha)\prec t(\beta)). \tag{8.1.1}$$

令 $E_1(R),\cdots,E_r(R)$ 和 $E_1(L),\cdots,E_l(L)$ 分别为 Tod 的右侧和左侧的类和

$$\begin{cases} k(R)=\max\limits_{1\leq i\leq r}|E_i(R)|;\\ k(L)=\max\limits_{1\leq j\leq l}|E_j(L)|.\end{cases} \tag{8.1.2}$$

则， G 的平面嵌入可以如下的方式表示.

首先，将 Tod 放在水平线上占 $\nu-1$ 个单位使其上每一条边为单位水平线段并且方向为从小到大. 若 α_0 的二端同与 $\sum_{1\leq j\leq l}E_j(L)(\sum_{1\leq i\leq r}E_i(R))$ 关联，则将 α_0 用 Tod 右 (左) 边一条带两个折的线表示. 其中的两个折在 Tod 上 (下) 方第 $k(R)+1$ $(k(L)+1)$ 单位的水平线上. 它们的横坐标与 Tod 的二端相同. 否则， α_0 二端点必与不同侧的边关联. 若 α_0 在 Tod 的根处与 $\sum_{1\leq i\leq r}E_i(R)$ $(\sum_{1\leq j\leq l}E_j(L))$ 关联，则从根 (Tod 的另一端) 向左 (右) 沿水平一个单位后向下 (上) 沿竖直 $k(R)+1$ $(k(L)+1)$ 个单位再水平线向右 (左) 到 Tod 的另一端 (根) 所在的横坐标沿竖直线向上 (下) 达到 Tod 的另一端 (根). 这样得一个有三个折的线表示 α_0.

然后,根据由平面嵌入所确定的旋纵横地嵌入每一类 $E_i(R)$, $1\leq i\leq r$, 和 $E_j(L)$, $1\leq j\leq l$. 例如，若 $\bar{E}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 为一类满足

$$h(\alpha_s)\prec h(\alpha_{s-1})\prec\cdots\prec h(\alpha_1)\prec t(\alpha_1)\prec t(\alpha_2)\prec\cdots\prec t(\alpha_s),$$

则可将每条上树边用二折的线段所表示使得依 $\bar{E}$ 在 Tod 的左(右) 侧 α_i 上的连二折的水平线段落在距 Tod 所在的线上 (下) 方 i 个单位的水平线上， $1 \le i \le s$. 由此，即可得引理. ▮

引理 8.1.2 任何 3- 正则图的平面嵌入都是 t- 可扩张的. 其中 t 是 $[0, \lfloor^{\nu(G)}/4\rfloor + 2]$ 上的一个整数.

证 根据由 G 的平面嵌入所确定的在每一个节点处的旋，我们可以先嵌入确向树 Tod 到平面上依如下的两步：

步 1 将此树的最长路嵌入到平面上一条水平直线内使得每边均无折；

步 2 在已经嵌入的部分中若有 Tod 的 3- 次节点 v 尚有一关联边未嵌入则嵌入由此节点始沿 Tod 未嵌入的边的最长路在垂直于 v 处已嵌入部分的直线上使得每边皆无折. 当然，如果需要，可通过细分使所有节点全落在格子点上.

然后，纵横地嵌入上树边. 设 $\alpha \in Tod^*$ 和 P_α 为在 Tod 上从 $h(\alpha)$ 到 $t(\alpha)$ 的路. 若 P_α 在 Tod 上有 $n_b(\alpha)$ 个折，则由 3- 正则性以及 Tod 的性质，总可用 $n_b(\alpha)+2$ 折的线段实现 α 的嵌入. 图 8.1.1 显示了最不利的情形. 其上粗线表 Tod 的嵌入. 细实线为上树边的嵌入.

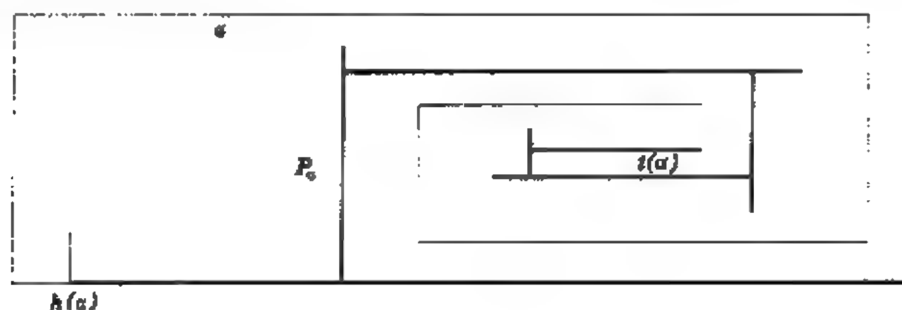


图 8.1.1

而且，可以证明，对于如此得到的纵横嵌入，

$$n_{br}(G)=\max_{\alpha\in Tod^*} n_b(\alpha) \tag{8.1.3}$$

是这样的一个整数 n 使得

$$\sum_{i=1}^{n-1}(i+3)<\nu(G)-3\leq\sum_{i=1}^{n}(3+i), \tag{8.1.4}$$

即

$$\frac{(n-1)(n+6)}{2}<\nu(G)-3\leq\frac{(n-1)(n+6)}{2}+n+3.$$

由此，可得

$$n_{br}(G)\leq\lfloor\nu(G)/4\rfloor. \tag{8.1.5}$$

(二式 (8.1.4-5) 的证明留给读者！) 从而，用与引理 8.1.1 的证明中相仿的方法可导致引理成立. ▮

定理 8.1.1 一个可平面图 $G=(V,E)$ 是 k- 可实现的 $(k\leq\nu(G)+4)$, 当且仅当 V 中节点次的最大值不大于 4.

证 由于任何一个次大于 4 的节点均不可纵横地嵌入到平面上，必要性显然.

反之，由引理 7.3.5 可知任何一个图的平面嵌入均可从一个 3- 正则图的平面嵌入变换而来. 事实上，图 G 的平面嵌入总可从它的伸长图 $\tilde{G}$ 变换而得到. 在这个变换中，只用到如图 8.1.2a 和图 8.1.2b 所示的两种运算即可从 $\tilde{G}$ 的一个纵横嵌入变到 G 的一个纵横嵌入. 不过，要注意经过这二种变换至多使一边增加 2 个折. 又，每边与两个节点关联至多接触到二次这种运算. 故至多增加 4 折. 由引理 8.1.2, 即得充分性. ▮

在一个纵横嵌入中，一个面若没有一条水平或竖直线与它的内部区域有两个或更多直线段，其中至少有一个为有限的，

公共，则称此面为 *凸的*(纵横地). 进而，若一个纵横嵌入的所有面均为凸的，则称它为 *纵横地凸嵌入*. 相仿地可知，凸k-嵌入即一个 k- 嵌入是纵横地凸的. 若一个图的某平面嵌入有一个纵横扩张是纵横地凸的，则称它是 *纵横地凸可扩张的*. 若一个平面嵌入不管那个面作为无限面均为纵横凸可扩张的，则称它是 *纵横地凸可实现的*. 相仿地，我们也可知对于一个平面嵌入，它是 *凸 k- 可扩张* 和 *凸 k- 可实现的* 涵义.

(a) (b)

图 8.1.2a

(a) (b)

图 8.1.2b

在一个节点次不大于 4 的图 $G=(V,E)$ 的某方格点嵌入中，若有一个次为 4 的节点 v 的四个邻节点全落在以 v 为原点的同一个象限中，则称 v 为 *拒凸点*.

引理 8.1.3 节点次不大于 4 的图 $G=(V,E)$ 的一个方格点凸嵌入是在节点的位置不变的条件下纵横地凸可扩张的，当

且仅当它没有拒凸点.

证　因为容易看出，一个拒凸点至少引起与它关联的一个面为纵横地非凸的（在节点的位置固定的条件下），引理的必要性显然.

反之，由于任何一个方格点嵌入的无限面总可以扩张为纵横地凸的. 不管在它的内部区域中的节点之位置如何只要其边界上节点位置固定即可. 从而，我们只需讨论内节点.

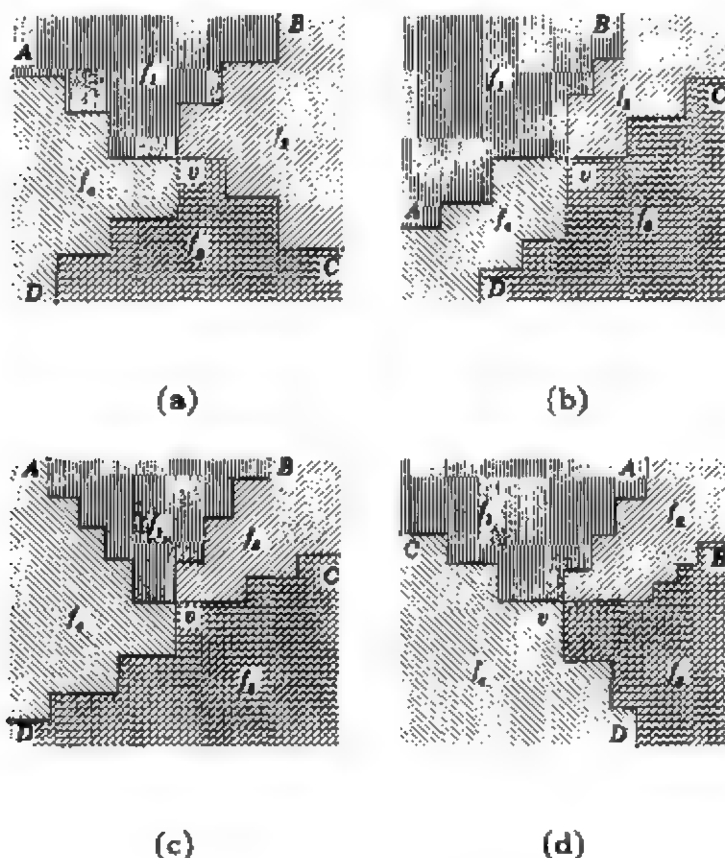


图 8.1.3

情形 1　设一个内节点 v 是 3- 次的. 容易验证所有与它关联的那三个面均可扩张为在 v 附近角内是纵横地凸的.

情形 2　设一个内节点 v 为 4- 次的，且由嵌入之凸性和 v 不是拒凸点. 这时，就其相邻四节点的相对位置而言只可能

出现如图 8.1.3(a), (b), (c) 和 (d) 四种状态之一而不计对称之状态. 事实上，在这些图中已经给出了在 v 附近各面的纵横的凸扩张.

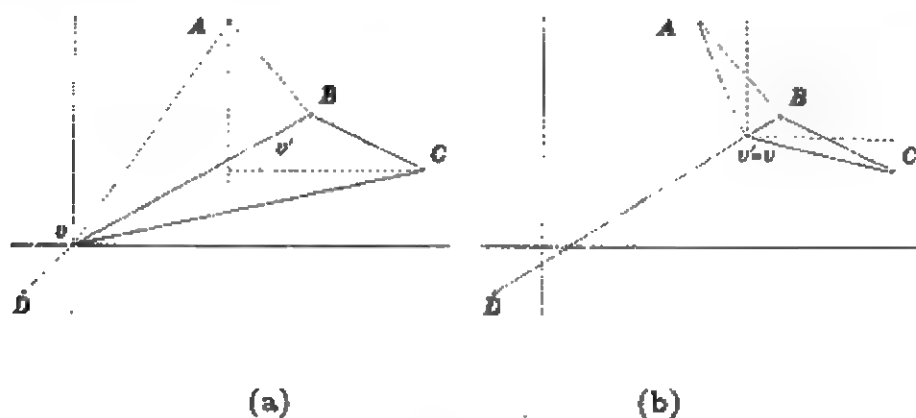
最后，所有的 *内边*, 即无限面边界内部的边均可用单调上升或下降的折线表示即可得到一个纵横地凸嵌入. 从而，充分性得证. ▯

并不是说图 G 的任何一个方格点凸嵌入 $\mu(G)$ 均可以变换到无拒凸点从而可得到它的一个纵横地凸扩张. 若在这个嵌入 $\mu(G)$ 中，有一个圈 C 其上所有节点全是 4- 次的并且恰有三个节点，它们的每一个都既有一条关联边在 C 的内部也有一条在 C 的外部和其它的所有节点，每个均有二条关联边在 C 的内部，则称之为 *4- 次 3- 分离圈*. 用 $\langle 4,4,4\rangle$ 表之. 可以验证. 任何一个方格点凸嵌入 $\mu(G)$, 只要它有一个构形 $\langle 4,4,4\rangle$ 则绝不能扩张为一个纵横地凸嵌入. 其理由是在 $\mu(G)$ 的 $\langle 4,4,4\rangle$ 上不可避免地有一个拒凸点.

引理 8.1.4 *若节点次不大于 4 的图 G 没有一个凸嵌入*(当然，非纵横地)*含构形 $\langle 4,4,4\rangle$, 则 G 的任何一个凸嵌入均可扩张为这样的一个方格点凸嵌入使得所有节点均非拒凸点.*

证 首先，由 §4.4 中所讨论的可知，若 G 有凸嵌入，则 G 必有方格点凸嵌入. 故，可以假设 $\mu(G)$ 为 G 的一个方格点凸嵌入. 若 $\mu(G)$ 没有拒凸点则即为所求. 否则，对 $\mu(G)$ 的拒凸点数进行归纳. 令 v 是 $\mu(G)$ 的一个拒凸点. 由于无 $\langle 4,4,4\rangle$, 无限面边界的凸性以及 G 的有限性，可以假设 v 的四个邻节点 A,B,C 和 D 中点 A,B 和 C 在 D 处的第一象限内而 B 不再是拒凸点 (如果 B 仍为 4- 次的话). 这就是说有如图 8.1.4(a) 所示之形式，角 ABC 大于 $\frac{\pi}{2}$. 若 B 是 3- 次的，我们也可假设

角 ABC 大于 $\frac{\pi}{2}$ 如图 8.1.4(b) 所示. 因为若否, 可将 B 用 B' 代之. 其中, B' 为 BM 上充分接近 M 的一个点, M 为 $\tilde{A}\tilde{C}$ 之中点和 $\tilde{A}$ 与 $\tilde{C}$ 为与角 ABC 关联的面边界上与 B 相邻的二个节点. 然而, 在图 8.1.4 的 (a) 与 (b) 之情形下, 均可在两四边形 $AvCB$ 和 $BA'B'C'$ 的公共区域中取一个充分接近 B 的方格点 v'. 其中, A', B', 和 C' 分别为过 A 的竖直线与过 B 的水平线, 过 A 的竖直线与过 C 的水平线, 和过 C 的水平线与过 B 的竖直线之交点. 这样, 我们总可在 $\mu(G-v)$ 增一个点 v' 并连直线段 $v'A$, $v'B$,$v'C$ 和 $v'D$ 而得到 G 的另一个方格点凸嵌入 $\mu'(G)$. 由 v' 的求取法, 在 $\mu'(G)$ 中节点 $v'=v$ 不再是拒凸点. 而且, 若 A,C 皆 4- 次的, 则由于无构形 $\langle 4,4,4\rangle$, 在 $\mu(G)$ 中不可能有边 (A,C). 这就使我们能够使 A,C 均不会在 $\mu'(G)$ 中变为新的拒凸点. 当然, 若 D 为 4- 次的, 由于 v 和 v' 在 D 处的同一个限中, 也不会使 D 在 $\mu'(G)$ 中变为新的拒凸点. 由于 $\mu'(G)$ 的拒凸点数比 $\mu(G)$ 少 1, 则从归纳假设 $\mu'(G)$ 可扩张成无拒凸点的嵌入. 从而, G 有一个方格点凸嵌入无拒凸点. 引理得证. ▮



(a) (b)

图 8.1.4

定理 8.1.2 任何节点次不超过 4 且无构形 $\langle 4,4,4\rangle$ 的 3-连通平面图 G 均为纵横地凸可实现的.

证 由定理 4.4.2 知 G 总有方格点凸嵌入且不依赖于无限面的选择. 由于 G 无 $\langle 4,4,4\rangle$, 即对于任何平面嵌入 $\mu(G)$ 皆无 $\langle 4,4,4\rangle$, 则对任何一个方格点凸嵌入，不管那个面作为无限面均无 $\langle 4,4,4\rangle$. 由引理 8.1.3-4, 即得 G 是纵横地凸可实现的.

♮

虽然一个有节点的分离对的图一般不是凸可嵌入的. 但在纵横地凸的情形，这种图却可有纵横地凸嵌入. 其中也包括一些没有一般的凸嵌入的图. 更为一般的结果可参见 [Liu29].

§8.2 叁可嵌入性

上一节，我们已经知道，任何一个节点次不大于 4 的可平面图，只要 k 充分大都是 k- 可嵌入的. 在那里 k 依赖图的阶. 本节的目的在于给出使得任何节点次不大于 4 的可平面图均为 k- 可嵌入的这个 k 的最小值. 结果是这个值为 3, 不依赖图的阶. 因与一个显节点关联的边总能纵横嵌入到平面上而无折和对于图的边的细分不会使 k 的值提高. 这里，我们可以不考虑显节点，即 1- 次节点，和 2- 次节点的出现. 为简便，称仅由 3- 次和 4- 次节点组成的可平面图为 *标准图*. 对于 G 的一个 k- 嵌入 $\mu_k(G)$ 的一个圈 C 上的一个节点 v, 若在 C 的内部区域与 v 关联的角为 $\frac{3}{2}\pi$, π, 或 $\frac{\pi}{2}$, 则分别称 v 为 C 的 *内*，*直*，或 *外节点*. 当然， C 上的任何一个节点都处在这个三状态：内，直和外之一. 令

$$St(v;C_{in}) = \begin{cases} 2, & \text{当 } v \text{ 为 } C \text{ 的内节点;} \\ 1, & \text{当 } v \text{ 为 } C \text{ 的直节点;} \\ 0, & \text{当 } v \text{ 为 } C \text{ 的外节点.} \end{cases} \tag{8.2.1}$$

并称它为在 C 上 v 的 *状态函数* 或 *内状态函数*. 进而，令

$$\overline{St}(v;C_{in}) = 2 - St(v;C_{in}). \tag{8.2.2}$$

并称它为 $St(v,C)$ 的 *补*. 则，可见

$$St(v;C_{out}) = \bar{S}t(v;C_{in}). \tag{8.2.3}$$

这里，$St(v;C_{out})$ 为 v 在 C 上的另一个状态函数，也称 *外状态函数*, 只是将 C 的内部改为外部. 若 C 是一个面 f 的边界时，$St(v;C_{in})$ 和 $St(v;C_{out})$ 分别用 $St(v;f) = St(v,f_{in})$ 和 $St(v;f_{out})$ 所代替. 事实上，$St(v;C_{in})$ ($St(v;C_{out})$) 指出了在 C 的内 (外) 部区域与 v 可允许连边的最大数.

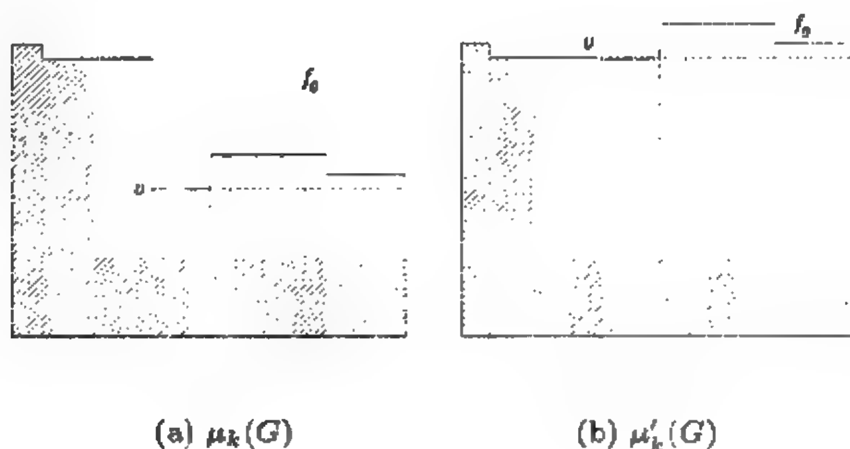
对于一条与 v 关联的边 e, 如果 e 是从 N(北方), W(西方), S(南方), 或 E(东方) 与 v 连接，则分别用 $e(v) \to N$, $e(v) \to W$ $e(v) \to S$, 或 $e(v) \to E$ 表示. 记

$$Dir(e;v) = \begin{cases} N, & 当\ e(v) \to N; \\ W, & 当\ e(v) \to W; \\ S, & 当\ e(v) \to S; \\ E, & 当\ e(v) \to E, \end{cases} \tag{8.2.4}$$

并称之为 e 在 v 处 *走向*.

令 f_0 为 G 的一个 k- 嵌入 $\mu_k(G)$ 的无限面，若 f_0 的一个直节点 v 有一条从 v 出发垂直 f_0 在 v 处的面边界的半直线在 f_0 内不与 $\mu_k(G)$ 的任何其它节点或点交叉，则称它是裸的. 若一个裸节点 v 处的那条半直线是从 v 指向北 (N), 西 (W), 南 (S), 或东 (E), 则称它为 f_0 的北、西、南、或东节点.

引理 8.2.1 若 G 是 k- 可嵌入的 $(k \geq 1)$, 则 G 有这样的一个 k- 嵌入 $\mu_k(G)$ 使得在无限面边界上的所有 3- 节点(或 3-次的节点) 全是直节点.



(a) $\mu_k(G)$　　(b) $\mu_k'(G)$

图 8.2.1

证　对无限面 f_0 边界上非直的 3- 节点的数目用归纳法. 若这个数为 0, 容易看出 $\mu_k(G)$, $k \geq 1$, 本身满足定理. 设 v 是 f_0 边界上的一个 3- 节点. 它不是直的. 设在 f_0 的边界上与 v 关联的二边中有一个带折 s 使 vs 是一个水平, 或竖直的线段且自然 $St(s;f_0)=2$(如 (8.2.1) 所示). 由于 v 不是直的, 则 $St(v;f_0)=0$. 我们总可以假定 $St(v;f_1)=1$, 其中 f_1 为与 s 关联的那个有限面. 在 $\mu_k(G)$ 上通过平行移动由 v 出发垂直于 vs 与 f_1 的内部相遇的射线沿 vs 到 s 使得与它垂直的线段的交点用在此移动中走的轨迹所代替如图 8.2.1 所示. 在所得的 k- 嵌入 $\mu_k'(G)$ 中节点 v 对于 f_0' 变为直的. 而且, 在 f_0' 的边界上非直 3- 节点的数目少 1. 否则, 即 s 是一个节点. 用平移 $\mu_k(G)$ 上从 v 始通过 s 的极长线段沿 f_0 边界上与 v 关联的另一边的相反方向一小段并记 v 的轨迹之终点 t 为所得 k- 嵌入 $\mu_k'(G)$ 上边 (v,s) 上的一折, 且 $St(v;f_0)=0$. 这时 $St(v;f_0')=1$, 即 v 变为直节点. 从而, f_0' 边界上非直节点的数目比 $\mu_k(G)$ 少 1.

由归纳法假设，即可得引理. ▯

引理 8.2.2　对于 $k \geq 3$, 若图 $G=(V,E)$ 有一个 k- 嵌入，则它可扩张为这样的一个 k- 嵌入使得在无限面 f_0 的边界上所有 3- 节点全是裸的.

证　对 G 的阶用归纳法. 当阶小时易验证. 一般地，设 v 为 G 的 k- 嵌入 $\mu_k(G)$ 的无限面 f_0 的边界上的一节点. 则 v 的次若不是 3 必为 4. 如果 v 是 3- 次的，令 v_1, v_2 和 v_3 为与 v 相邻的节点. 我们可以假定它们的次全为 4 而不失一般性. 由于 $\mu_k(G-v)$ 也是 k- 嵌入. 由归纳法假设， $\mu_k(G-v)$ 可以扩张为 $\mu_k'(G-v)$ 使得在它的无限面 f_0' 边界上的所有 3- 节点是裸的. 记

$$Ar(v_1,v_2,v_3;f_0')=(Ar(v_1;f_0'),Ar(v_2;f_0'),Ar(v_3;f_0')). \quad (8.2.5)$$

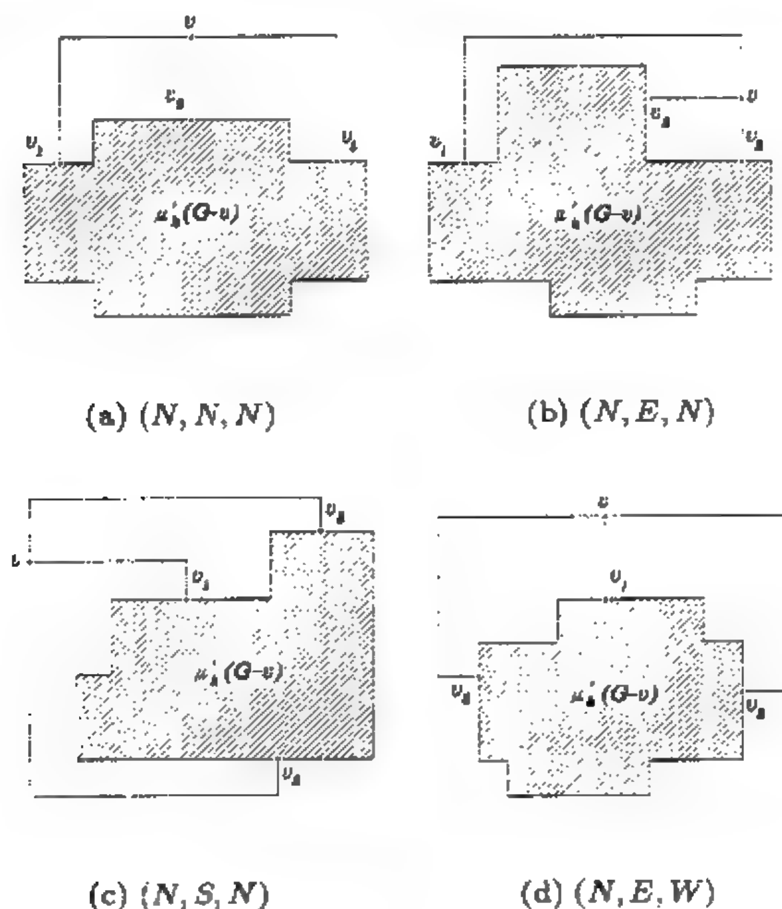
其中， $Ar(v;f)$, v 在 f 的边界上，表示这样的方向使得在此方向上在 v 处可以连边. 则，由对称性， $Ar(v_1,v_2,v_3;f_0')$ 只可能有如下四种可能情形：

$$(N,N,N),(N,E,N),(N,S,N),(N,E,W).$$

对于每一情形，我们均可在 $\mu_k'(G-v)$ 中恢复节点 v, 可能通过作引理 8.2.1 的证明中引进的运算后求得 $\mu_k'(G)$ 使之满足所需求之条件，如图 8.2.2 所示.

设 v 为 4- 次的. 设 v_1,v_2,v_3 和 v_4 为 v 的相邻节点. 同样地，可设 $\rho(v_i)=4$, $i=1,2,3,4$, 而不失一般性. 而且，以同样的理由，可以设 $\mu_k'(G-v)$ 为一个 k- 嵌入并满足所要的条件. 在 $Ar(v_1,v_2,v_3,v_4;f_0)$ 的所有可能情形中， (N,N,S,E) 和 (N,E,S,W) 是二种最不利之情形会导致在一条边上用较多的折. 然而，我们仍可以多半要经过如引理 8.2.1 引进的移动而

得到 G 的一个 k- 嵌入 $\mu_k(G)$ 使之满足引理中要求的条件，$k \geq 3$, 如图 8.2.3 所示. 从而，引理得证. ♮



(a) (N, N, N) (b) (N, E, N)

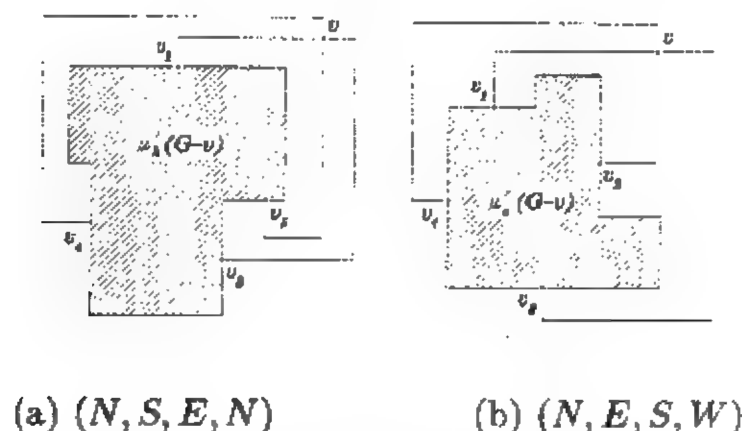
(c) (N, S, N) (d) (N, E, W)

图 8.2.2

定理 8.2.1 任何节点次不大于 4 的可平面图皆 3- 可实现的.

证 对 G 的阶用归纳法. 当阶较小时，容易验证. 如前面所提到的，只讨论 G 的所有节点的次非 3 即 4 的情形就够了. 令 $v \in V$. 由归纳假设可知 $G - v$ 是 3- 可嵌入的. 设 $\mu_3(G - v)$ 为它的一个 3- 嵌入使得 v 的邻节点全在它的无限面 $f_0(v)$ 的边界上. 由引理 8.2.1-2, 可以假设 $f_0(v)$ 边界上的所有 3- 节点全是裸的. 这样就允许我们在 $\rho(v) = 3$ 时将 v 放到 $f_0(v)$ 的内

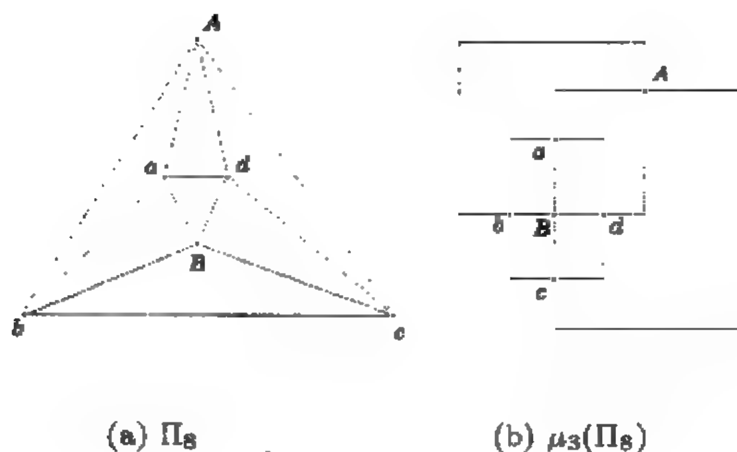
部使得边 (v,v_1), (v,v_2) 和 (v,v_3) 均至多有 3 折，如图 8.2.2 所示，和在 $\rho(v)=4$ 时相仿地如图 8.2.3 所示．由 $\mu_3(G-v)$ 得到 G 的一个 3- 嵌入 $\mu_3(G)$. 当 v 的邻节点不全是在 $f_0(v)$ 的边界上，容易由 $\mu_3(G-v)$ 得到 $\mu_3(G)$. 由 f_0 的任意性即得定理． ▯



(a) (N,S,E,N) (b) (N,E,S,W)

图 8.2.3

在图 8.2.4 中， (a) 给出了正八面体 Π_8 和 (b) 为它的一个 3- 嵌入.



(a) Π_8 (b) $\mu_3(\Pi_8)$

图 8.2.4

引理 8.2.3 正八面体 Π_8 的任何平面嵌入均不可能扩张为一个 2- 嵌入.

证　由定理 4.2.3 和对称性，不管取那一个面为无限面所得的 Π_8 的平面嵌入对于纵横扩张均与图 8.2.4(a) 所表示的无异．事实上，$Ar(a,b,c,d; f_0(\Pi_8 - A))$ 只有如下 12 种情形值得讨论：

$$(N,N,N,S),\quad (N,N,E,S),\quad (N,N,E,W),$$

$$(N,N,E,E),\quad (N,E,N,S),\quad (N,N,S,W),$$

$$(N,N,S,S),\quad (N,S,N,E),\quad (N,S,N,S),$$

$$(N,E,S,W),\quad (N,E,W,S),\quad (N,S,E,W)$$

出现在 $C = abcd$ 的 k- 嵌入中，$k \leq 2$. 然而不管上面的那一种情形，容易验证，均不可能分别置 A 和 B 于它的外部和内部而得到 Π_8 的一个 2- 嵌入．从而，引理得证．

这个引理告诉我们定理 8.2.1 的结果已经是最好的可能，即不能在改进了．然，我们还可以用在定理 8.2.1 的证明中出现的相仿的方法将定理 8.2.1 引伸得到如下的推论．

推论 8.2.1　任何节点次至多为 k, $1 \leq k \leq 4$, 的可平面图均 $(k-1)$- 可嵌入．

证　当 $k = 1,2$ 时，易证．当 $k = 4$ 时，就是定理 8.2.1. 剩下只有 $k = 3$ 的情形．对 G 的阶用归纳法，从定理 8.2.1 的证明过程中如图 8.2.2 所示，即得推论．

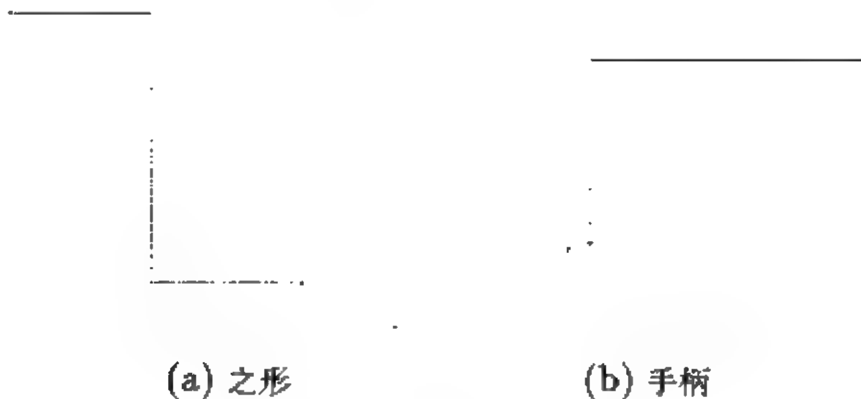
令 $Z_1 = Z(v,u)$ 为由在水平 (或竖直) 线上线段 uv 和二条从 u 和 v 发出并与 uv 垂直的射线所围成的区域．令 $Z_0 = Z(v,w)$. 其中 w 为 uv 的内点充分接近 v. 若一个 3- 嵌入 $\mu_3(G)$ 为从 $\mu_3(G)$ 通过将 Z_1 线性变换到 Z_0 使得在 u 处的射线与 $\mu_3(G)$ 中与它垂直的线段之公共点 p 随着射线从 u 到 w 变为其轨迹所

示的线段，则称 $\mu_3'(G)$ 为 $\mu_3(G)$ 从 Z_1 到 Z_0 的 压缩.

引理 8.2.4　若 uv 为 G 的凸 3- 嵌入 $\mu_3(G)$ 的内面 f 的边界上的一个线段，则 $\mu_3(G)$ 从 $Z = Z(u,v)$ 到 $Z_0 = Z(u,w)$, w 为 uv 的一个内点，的压缩 $\mu_3'(G)$ 仍然是 G 的一个凸 3- 嵌入.

证　由纵横凸性和压缩运算的定义，而且压缩运算不会增加一个折. 从而，只要 $\mu(G)$ 凸 3- 嵌入 $\mu_3'(G)$ 就是凸 3- 嵌入. ♮

在一个 3- 嵌入 $\mu_3(G)$ 中，一个具有多于 1 折的边必含有一个 *之形结构*, 如图 8.2.5(a) 所示或者一个 *手柄*, 或 *工形结构* 如图 8.2.5(b) 所示. 事实上，在 $\mu_3(G)$ 中，任何一边上的之形结构全是非本质的. 而且，一条边上的两端均非节点的手柄也是非本质的. 进而，如果 $\mu_3(G)$ 是凸的，则由引理 8.2.4 可以假设它的所有内边都至多有一折.



(a) 之形　　　　(b) 手柄

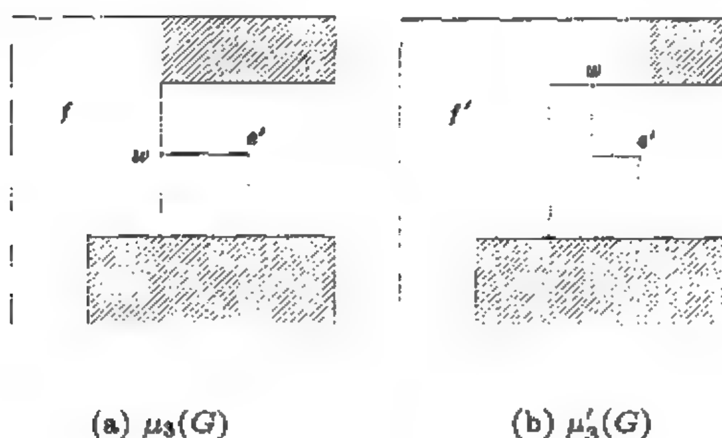
图 8.2.5

引理 8.2.5　令 $\mu_3(G)$ 是图 G 的一个凸 3- 嵌入. 用 f_0 和 f 分别表示它的这个无限面和一个内面. 对于不在 f_0 的边界上而在 f 的边界上的一个 3- 节点 w, $\mu_3(G)$ 可以扩张为另一个凸 3- 嵌入 $\mu_3'(G)$ 使 f 在其上相应的面 f' 有关系:

$$Ar(v;f') = \begin{cases} Ar(v;f), & v \neq w; \\ Ar(v;f) \pm \pi/2, & v = w. \end{cases} \tag{8.2.6}$$

证 由引理 8.2.1, 在 f 边界上的所有 3- 节点可以假设全对 f 为直的. 分二种情形讨论.

情形 1 如果在 f 的面边界上与 w 关联的二边之一无折, 则由凸性和 w 为 3- 节点, 与 w 关联不在 f 面边界上的那一条边 e' 在 $\mu_3(G)$ 中至多有一折. 如果 e' 无折, 通过在 e' 上和那条在 f 的边界上且与 w 关联的无折边各引进一折, 然后再作适当地移动, 即可从 $\mu_3(G)$ 得到 $\mu_3'(G)$ 也是凸 3- 嵌入而且满足 (8.2.6). 若 e' 有一折如图 8.2.6 所示. 由引理 8.2.4 总可将它同时转化为无折.

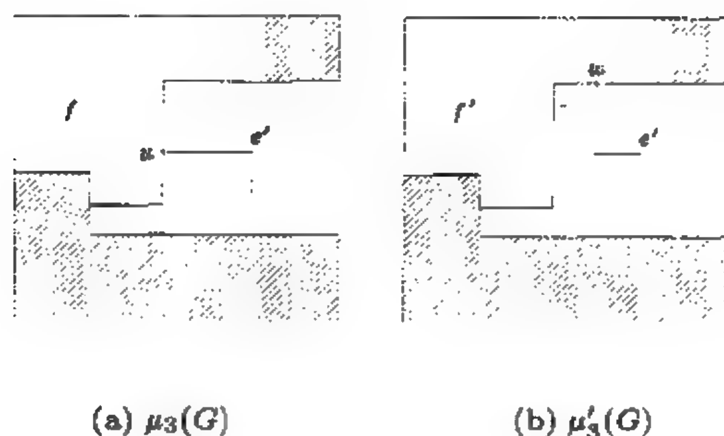


(a) $\mu_3(G)$ (b) $\mu_3'(G)$

图 8.2.6

情形 2 否则, 因为在 f 边界上与 w 关联的二边均有折, 我们也总可将 $\mu_3(G)$ 变到 $\mu_3'(G)$ 如图 8.2.7 所示 (按照与上一情形同样的理由) 使得仍为凸 3- 嵌入且满足 (8.2.6), 或者当 e' 的折为另外的方式时, 变到情形 1.

综上所述，即得引理.



(a) $\mu_3(G)$　　(b) $\mu'_3(G)$

图 8.2.7

引理 8.2.6 令 G 为一个不可分离的可平面图且节点之次均不超过 4. 设 G 有一个平面嵌入 $\mu(G)$ 使得它的所有有限面均与它的无限面 f_0 相邻. 则，$\mu(G)$ 是凸 3- 可扩张的.

证　因为将 f_0 的边界去掉之后 $\mu(G)$ 变为一个森在平面上的嵌入，对于 f_0 边界上的 4- 节点 v, 将与它关联的在 f_0 边界上的二边相应此森在 v 处与一个附加的显节点连的边，记这样得到的森为 $\tilde{T}$. 由于总可将 $\tilde{T}$ 纵横扩张为一个 1- 嵌入使得它的所有显节点全落在一个矩形的边界上，在此基础上，去掉矩形边界上不相应 $\mu(G)$ 中边的线段，经过适当变换之后即可得 $\mu(G)$ 的凸 2- 扩张. 当然，更是 $\mu(G)$ 的凸 3- 扩张.

定理 8.2.2 一个节点次不超过 4 的可平面图 G(仍限定为 3- 连通的)是凸 3- 可实现的，当且仅当在 G 的任何平面嵌入中均不含$\langle 4,4,4\rangle$.

证　根据前面所讨论的可知必要性是显然的. 我们只证充分性. 对 G 的度用归纳法. 当度较小时，易验证. 一般地，令 $\mu(G)$ 为 G 的一个纵横凸嵌入. 由定理 8.1.2 这是总可办到

的. 若它的所有有限面都与 f_0 相邻, 则由引理 8.2.6 可知 $\mu_3(G)$ 为凸 3- 可扩张的. 否则, 可以假设 $e=(u,v)$ 是这样的边使得 u 和 v 均不在 f_0 的面边界上. 由归纳假设知 $\mu(G-e)$ 可扩张为一个凸 3- 嵌入 $\mu_3'(G-e)$. 记 f' 为 $\mu_3'(G-e)$ 的相应 $\mu(G)$ 中与 e 关联的二个面的那个面. 依引理 8.2.1 的证明中的方法, 我们总可假设 u 和 v 对于 f' 都是直的.

情形 1 若 $Ar(u;f')\neq Ar(v;f')$, 可以假设 $Ar(u;f')=Ar(v;f')\pm\dfrac{\pi}{2}$. 因为若否, 由引理 8.2.4 和 f' 的凸性可知总能在 $\mu_3'(G-e)$ 的基础上恢复 e 作为无折线段得凸 3- 嵌入 $\mu_3(G)$. 由于从凸性可知, 分别以 u 和 v 为发出点沿 $Ar(u;f')$ 和 $Ar(v;f')$ 的方向的射线与 f' 内部各有一个公共线段. 则由引理 8.2.4, 这二条线段可以假设有一个公共点 p. 自然, p 必在 f' 的内部. 由此, 可以在 $\mu_3'(G-e)$ 上恢复边 e 为从 u 到 p 和从 p 到 v 带一折 p 的线所表示. 容易验证, 如此所得的即为 G 的一个凸 3- 嵌入 $\mu_3(G)$.

情形 2 若 $Ar(u;f')=Ar(v;f')$, 则由引理 8.2.5 可化为情形 1.

由于选取 $\mu(G)$ 的任意性, 即得定理. ♮

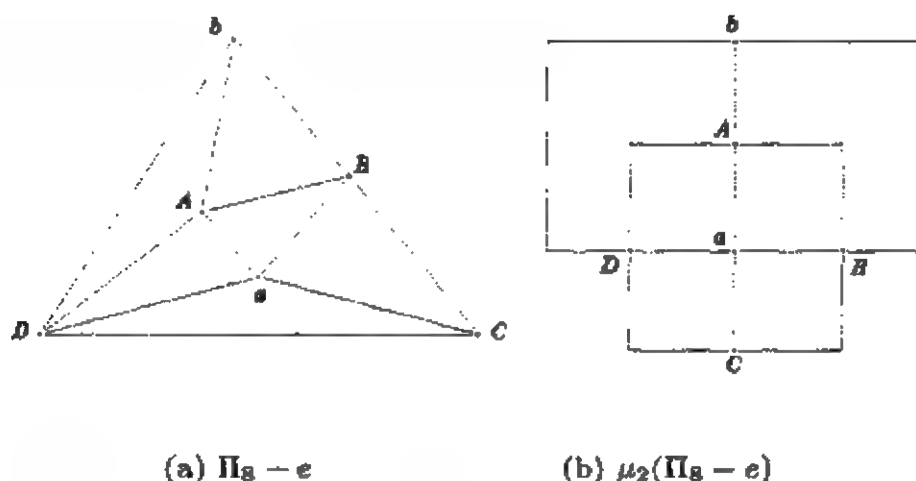
§8.3 双可嵌入性

由于任一个图, 如果它有一个子图是非 2- 可嵌入的, 则它本身也必为非 2- 可嵌入的. 这就允许我们只讨论极小的非 2- 可嵌入的图, 并称之为 *2-障碍*. 所谓极小即指无真子图为非 2- 可嵌入的.

引理 8.3.1 正八面体 Π_8 是一个 2- 障碍.

证 由引理 8.2.3 可知 Π_8 是非 2- 可嵌入的. 而且, 容易

检验它的所有真子图皆 2- 可嵌入的. 事实上，由对称性可知 Π_8 的任何一个真子图均与 $\Pi_8 - e$ 的一个子图同构. 其中， e 是任选的一条边. 然，图 8.3.1 给出了 $\Pi_8 - e$ 和它的一个 2- 嵌入.



(a) $\Pi_8 - e$ (b) $\mu_2(\Pi_8 - e)$

图 8.3.1

对于图 $G = (V, E)$ 的一个 2- 嵌入 $\mu_2(G)$, 令 $Oc(v; f)$ 为 $Or = \{N, W, S, E\}$ 的这样一个子集使得其中的每个方向均被与 f 边界上节点 v 关联的边所占有. 当然，只有那些次小于 4 的节点 v, $Oc(v; f)$ 才非 O_r. 且，在 §8.2 中所定义的 $Ar(v; f)$ 为 $\bar{O}c(v; f) = Or - Oc(v; f)$ 的一个子集使得其中的每一个方向均表示在 f 的内部可以连边. 容易看出. 如果 $G = (V, E) = G_1 \cup G_2$ 且 $G_1 \cap G_2 = v \in V$, 则 G 的一个 2- 嵌入可以由 G_1 和 G_2 的 2- 嵌入 $\mu_2(G_1)$ 和 $\mu_2(G_2)$ 经过将二者中的 v 合而为一所合成当且仅当 v 在 $\mu_2(G_1)$ 中有一个关联面 f_1 和在 $\mu_2(G_2)$ 中有一个关联面 f_2 使得至少它们中之一，不妨设为 f_1, 为无限面和

$$Oc(v; f_1) \subseteq Ar(v; f_2). \tag{8.3.1}$$

满足条件 (8.3.1) 的节点被称对于 2- 嵌入 $\mu_2(G_1)$ 和 $\mu_2(G_2)$ 为可合成的. 相仿地，若 $G = G_1 \cup G_2$ 且 $G_1 \cap G_2 = u + v$, 即

$\{u,v\} \subseteq V$ 为 G 的一个劈对，则 G 的一个 2- 嵌入 $\mu_2(G)$ 可由 G_1 和 G_2 的 2- 嵌入 $\mu_2(G_1)$ 和 $\mu_2(G_2)$ 经过分别合它们中相应 u 和 v 的节点而为一所得到当且仅当 u 和 v 同时对于二面 f_i ind $\{u,v\} \subset \mu_2(G_i), i=1,2$, 是可合成的并使在 u 和 v 处的旋与 $\mu_2(G)$ 中的一致.

引理 8.3.2 令 $G=(V,E)=G_1 \cup G_2$ 且 $G_1 \cap G_2 = v \in V$. 一个平面嵌入 $\mu(G)$, 它的无限面边界为平面嵌入 $\mu(G_1)$ 和 $\mu(G_2)$ 的无限面边界无公共边之并，为 2- 可扩张的当且仅当 $\mu(G_1)$ 和 $\mu(G_2)$ 同为 2- 可扩张的.

证 令 $f_0=f_0(G)$, $f_0(G_1)$ 和 $f_0(G_2)$ 分别为 $\mu(G)$, $\mu(G_1)$ 和 $\mu(G_2)$ 的无限面. 因为 $\mu(G)$ 的任何 2- 扩张 $\mu_2(G)$ 限制在 G_1 和 G_2 上的部分 $\mu_2(G)|_{G_1}$ 和 $\mu_2(G)|_{G_2}$ 均分别为 G_1 和 G_2 的 2- 扩张，必要性显然.

反之，设 $\mu_2(G_1)$ 和 $\mu_2(G_2)$ 分别为 G_1 和 G_2 的 2- 扩张. 若 $\rho(v;G_1)$ 和 $\rho(v;G_2)$ 中有一个为 1, 不妨设 v 在 G_1 中之次 $\rho(v;G_1)=1$, 则不管 $\rho(v;G_2)=1,2$, 还是 3, 我们总可以使得在 $\mu_2(G_2)$ 中 $St(v;f_0(G_2) \geq 1$ 和 $Oc(v;f_0(G_1)) \subseteq Ar(v;f_0(G_2))$. 这就是说，$v$ 对于 $\mu_2(G_1)$ 和 $\mu_2(G_2)$ 是可合成的. 从而，$\mu(G)$ 是 2- 可扩张的. 否则，即 $\rho(v;G_1)=\rho(v;G_2)=2$. 因为 2- 节点 v 在一个 2- 嵌入的面 f 的边界上总可使得 $St(v;f)=2$. 从而，2- 嵌入 $\mu_2(G_1)$ 和 $\mu_2(G_2)$ 总可约定具有性质：$St(v;f_0(G_i))=2$, $i=1,2$, 和 $Oc(v;f_0(G_1))=Ar(v;f_0(G_2))$. 就是说，$v$ 这时对于 $\mu_2(G_1)$ 和 $\mu_2(G_2)$ 也是可合成的. 故，$\mu(G)$ 是 2- 可扩张的. 这就得到了充分性. □

引理 8.3.3 令 $G=(V,E)=G_1 \cup G_2$ 且 $G_1 \cap G_2 = u+v$, $u,v \in V$. $\rho(u;G_1)=\rho(u;G_2)=\rho(v;G_1)=\rho(v;G_2)=2$. 一个平

面嵌入 $\mu(G)$ 使得 u,v 全在无限面 f_0 的边界上为 2- 可扩张的当且仅当 $\mu_2(G_1)$ 和 $\mu_2(G_2)$ 是 2- 可扩张的使得 $St(v;f_0(G_1))=St(v;f_0(G_2))$ 且 $Ar(v;f_0(G_1))=Oc(v;f_0(G_2))$ 和 $St(u;f_0(G_1))=St(u;f_0(G_2))$ 且 $Ar(u;f_0(G_1))=Oc(v;f_0(G_2))$.

证　因为容易验证，若 $\mu_2(G)$ 为 $\mu(G)$ 的一个 2- 扩张则它限制在 G_1 和 G_2 的部分必为 $\mu(G_1)$ 和 $\mu(G_2)$ 的 2- 扩张且满足所要求的条件，故必要性显然.

反之，由 $\mu(G_1)$ 和 $\mu(G_2)$ 的 2- 扩张 $\mu_2(G_1)$ 和 $\mu_2(G_2)$ 满足给定的条件，利用引理 8.2.2 的证明中的方法，即可导致 $\mu(G)$ 的一个 2- 扩张. 从而，充分性成立. ▯

虽然，引理 8.3.2-3 还可以推广到 2- 可嵌入的情形. 但由于这时比较复杂，要占用过多的篇幅. 不能在这里讨论了. 它们的意义在于使我们可以只研究 3- 连通的图而不失一般性. 由于 1- 节点和 2- 节点对于图的 2- 可嵌入性 (即双可嵌入性) 而言无足轻重，我们只限于讨论标准图.

引理 8.3.4　若 G 有一个 2- 嵌入使得所有在无限面 f_0 的边界上的 3- 节点都是裸的，则所有那些可视为经在 f_0 内引进一个 r- 节点 $(r\leq 3)$ 而得到的图均有 2- 嵌入并且无限面上的所有 3- 节点也全是裸的.

证　用引理 8.2.2 的证明中的方法. 因为一个 r- 节点 $(r\leq 3)$ 总可被放在一个 2- 嵌入 $\mu_2(G)$ 的无限面 f_0 内使得与它关联的边都至多有 2 折. 而且，所得到的 2- 嵌入可使得在无限面边界上的 3- 节点全是裸的. 这就得到了引理. ▯

引理 8.3.5　对于 3- 连通的标准图，在一个 2- 障碍上的所有节点必全为 4- 节点.

证　设 H 是一个 2- 障碍，用反证法. 由标准性，令 v 是一个 3- 节点. 如果 $H-v$ 不再有 4- 节点，则令 $H_0=H-v$. 否则，令 $H_1=H-v$ 和设 v_1 是一个与 H_1 中 4- 节点相邻但它本身的次小于 4 的节点. 则 $H_2=H_1-v_1$ 的 4- 节点比 H_1 的至少少 1. 如果 H_2 已不再有 4- 节点，则令 $H_0=H_2$. 否则，用 H_1-v 代 H_1 之位置继续作下去. 由有限性总可得到 H_0. 从推论 8.2.1 可知 H_0 是 2- 可实现的. 这就使我们可以假设 $\mu_2(H_0)$ 是这样的一个 2- 嵌入，只有它的无限面边界上的节点与去掉的节点相邻. 从而，根据引理 8.2.4, 按去掉节点的相反次序，用引理 8.2.2 的证明中的方法，恢复已经去掉的节点所得到的即为 H 的一个 2- 嵌入. 与 H 为 2- 障碍矛盾. ♮

引理 8.3.6　对于 4- 正则图 $G=(V,E)$, 任何三角形均不可能是它的某个 2- 嵌入的无限面的边界.

证　用反证法. 假设三角形 $v_1v_2v_3$ 形成了 G 的某个 2- 嵌入 $\mu_2(G)$ 的无限面 f_0 的边界. 因为 $v_i, i=1,2,3$, 皆 4- 节点，有 $St(v_i,f_0)=0$, $i=1,2,3$. 然，这是不可能的. 理由是可以检验任何三角形均没有 2- 嵌入满足这一性质. ♮

引理 8.3.7　若一个 4- 正则图 $G=(V,E)$ 有一个平面嵌入 $\mu(G)$ 使得所有面皆三角形，则 G 与正八面体 Π_8 同构.

证　由节点的 4- 正则性和面的 3- 正则性可知 $\mu(G)$ 为球面上的 (4,3)- 多面形. 从定理 4.1.1 即得引理. ♮

引理 8.3.8　一个 4- 正则的 3- 连通标准图 $G=(V,E)$ 的任何平面嵌入 $\mu(G)$, 若它的无限面 f_0 的次大于 3, 则 $\mu(G)$ 是 2- 可扩张的.

证　若 $\mu(G)$ 不含构形 $\langle 4,4,4\rangle$, 则由定理 8.2.2 知它是 3-

可扩张的. 而且，无限面的边界上总可使每一边至多 2- 折和满足

$$\forall\, v \in V(f_0) \quad St(v; f_0) = 0. \tag{8.3.2}$$

其中，$V(f_0)$ 为无限面 f_0 的边界上节点的集合. 又，注意到在任何一个凸 3- 嵌入中，所有内边均可至多 1 折. 故，这个 3- 嵌入实际上是 2- 嵌入.

一般地，对 $\mu(G)$ 中构形 $\langle 4,4,4\rangle$ 的数目用归纳法. 设 $C = (v_1, v_2, v_3)$ 形成这样的构形 $\langle 4,4,4\rangle$ 使得在 C 的内部不再有构形 $\langle 4,4,4\rangle$. 由于 C 可以嵌入到平面上使得

$$\forall\, v_i (i = 1,2,3), \quad St(v_i; C_{in}) = St(v_i; C_{out}) = 1 \tag{8.3.3}$$

和其上只有一条边为 2 折而其它的边皆 1 折. 从定理 8.2.2 又知 C 连同 $\mu(G)$ 在 C 内部区域中的部分有一个凸 2- 扩张 $\mu_2(G; C_{in})$. 而且，由归纳假设 C 连同 $\mu(G)$ 在 C 外部区域中的部分也有一个 2- 扩张 $\mu_2(G; C_{out})$. 因为满足 (8.3.3) 的 C 的嵌入实质上是唯一的，从而这二个 2- 嵌入 $\mu_2(G; C_{in})$ 和 $\mu_2(G; C_{out})$ 可合成 $\mu(G)$ 的一个 2- 扩张. ♮

定理 8.3.1 一个 3- 连通标准图 $G = (V, E)$ 是 2- 可嵌入的，当且仅当 $G \not\cong \Pi_8$.

证 由引理 8.3.1 可得必要性. 反之，由引理 8.3.5-8 可知 3- 连通标准图的 2- 障碍的完备集就是由 Π_8 本身组成. 从而，定理的充分性得证. ♮

引理 8.3.9 对于不可分离的标准图 $G = (V, E)$ 的一个平面嵌入 $\mu(G)$，如果它的一个面 f 的边界 C 有一个 2- 嵌入 $\mu_2(C)$ 使得

$$St(v;C_{in})\begin{cases} =2, \text{ 若 } \rho(v;G)=4; \\ \geq 1, \text{ 若 } \rho(v;G)=3, \end{cases} \tag{8.3.4}$$

则 G 有一个 2- 嵌入以 $\mu_2(C)$ 为其无限面的边界.

证 若 G 没有 4- 节点，则由推论 8.2.1 可得 $\mu(G)$ 的一个 2- 扩张使得 C 为无限面边界. 由引理 8.2.1 总可使之满足条件 (8.3.4). 否则，利用引理 8.3.5 的证明中所建议的方法，仍可得 $\mu(G)$ 的一个 2- 扩张使 C 为无限面边界. 同样，由引理 8.2.1 可使之满足条件 (8.3.4). ♮

引理 8.3.10 令 $G=(V,E)=G_1\cup G_2$ 且 $G_1\cap G_2=u$, $u\in V$, $\rho(v)\leq 4$. 则，G 是 2- 可嵌入的当且仅当 G_1 和 G_2 同是 2- 可嵌入的.

证 由于 G 的任何一个 2- 嵌入均导致 G_1 和 G_2 的 2- 嵌入，必要性显然. 反之，由 G_1 和 G_2 的 2- 可嵌入性可知 G 必为可平面的. 而且，可以假设 G_1 和 G_2 均不可分离. 否则，可以逐个地讨论它们的块. 由引理 8.3.2 和引理 8.3.9 即可导出引理. ♮

引理 8.3.11 令 $G=G_1\cup G_2$ 且 $G_1\cap G_2=u+v$, $u,v\in V$, $\rho(u),\rho(v)\leq 4$. 则，G 是 2- 可嵌入的，当且仅当 G_1 和 G_2 同为 2- 可嵌入的.

证 必要性显然. 只证充分性. 由 2- 可嵌入性，G 必为可平面的. 因为 G 总有一个平面嵌入使得无限面与 u 和 v 关联. 记 $f_0(G_1)$ 和 $f_0(G_2)$ 分别为 $\mu(G_1)$ 和 $\mu(G_2)$ 的无限面. 可以检验，不管怎样 $f_0(G_1)$ 和 $f_0(G_2)$ 的边界 C_1 和 C_2 总有 2- 嵌入满足 (8.3.4) 并使得对于劈对 $\{u,v\}$ 可合成的条件也满足. 从

而，由引理 8.3.3 和引理 8.3.9 即可得充分性. ♮

推论 8.3.1 一个节点次小于 5 的连通图 $G=(V,E)$ 是 2- 可嵌入的，当且仅当它是可平面的并且不与 Π_8 同构.

证 由引理 8.3.10-11 和定理 8.3.1 即可得. ♮

推论 8.3.2 一个节点次小于 5 的 2- 连通可平面图 $G=(V,E)$ 是 2- 可实现的，当且仅当 G 的任何一个平面嵌入均没有三角形的面使得其上三个关联节点之次均为 4, 或简记之为 (4,4,4).

证 因为 (4,4,4) 的三角形面不可作任何 2- 嵌入的无限面，必要性为真. 反之，因为没有三角形面 (4,4,4), 依引理 8.3.9 和推论 8.3.1 可知任何面均可作为 2- 扩张的无限面. 从而，充分性也真. ♮

下面，我们讨论一个图的凸 2- 可嵌入性的表征.

引理 8.3.12 一个可平面的 3- 连通标准图 $G=(V,E)$ 的一个平面嵌入 $\mu(G)$ 是凸 2- 可扩张的，当且仅当 $\mu(G)$ 没有构形 $\langle 4,4,4\rangle$ 而且其无限面不是三角形 (4,4,4).

证 如前所述，必要性显然. 只证充分性. 由于没有 $\langle 4,4,4\rangle$, 定理 8.2.2 使我们有 $\mu(G)$ 是凸 3- 可扩张的. 然无限面非 (4,4,4), $\mu(G)$ 实际上为凸 2- 可扩张. 充分性得证. ♮

引理 8.3.13 一个 3- 连通的可平面标准图 $G=(V,E)\ncong\Pi_8$ 是凸 2- 可嵌入的，当且仅当 $\mu(G)$ 无构形 $\langle 4,4,4\rangle$.

证 若 $\mu_2(G)$ 是 G 的一个凸 2- 嵌入. 因为 $\langle 4,4,4\rangle$ 的出现导致不可能有凸 3- 扩张，更无凸 2- 扩张，$\mu_2(G)$ 中不可能有构形 $\langle 4,4,4\rangle$, 必要性得证. 反之，因为 $G\neq\Pi_8$, 由定理 8.3.1

知 G 是 2- 可嵌入的. 令 $\mu_2(G)$ 为 G 的一个 2- 嵌入, 然而, 它的无限面不可能是 (4,4,4). 由引理 8.3.12 可知 $\mu_2(G)$ 的凸 3- 扩张实际上为凸 2- 扩张. 这就得到了充分性. ♮

定理 8.3.2 一个 3- 连通的可平面标准图 $G=(V,E)\not\cong \Pi_8$ 是凸 2- 可实现的, 当且仅当它的平面嵌入 $\mu(G)$ 既无三角形面 (4,4,4) 也无构形 $\langle 4,4,4\rangle$.

证 必要性显然. 只证充分性. 由 §4.3 中所讨论的 G 的平面嵌入的唯一性, 由引理 8.3.12 即可得充分性. ♮

§8.4 单可嵌入性

本节主要任务在于对一些类型的 2- 可嵌入的图找出 1- 可嵌入性 (或者说, 单可嵌入性) 的禁用构形的完备集以刻划其中 1- 可嵌入的图.

引理 8.4.1 设 $\mu(G)$ 是一个 3- 正则图的一个平面嵌入. 若 $\mu(G)$ 的无限面不是三角形则它是凸 1- 可扩张的.

证 由引理 8.3.12, $\mu(G)$ 是凸 2- 可扩张的. 设 $\mu_2(G)$ 为 $\mu(G)$ 的一个凸 2- 扩张. 由凸性, $\mu_2(G)$ 的所有内边均至多有 1 折. 进而, 因无限面 f_0 非三角形, 它有一个凸嵌入使得对任何节点 v ind f_0 有 $St(v;f_0)=1$. 因此, $\mu_2(G)$ 实际上就是 $\mu(G)$ 的一个凸 1- 扩张. ♮

引理 8.4.2 一个 3- 正则可平面图 $G=(V,E)$ 的一个平面嵌入 $\mu(G)$ 不是 1- 可嵌入的当且仅当它的每个面均为三角形.

证 因为容易检验, 三角形面 f 不可能有一个 1- 嵌入使得对所有 v ind f, $St(v;f)=1$. 任何三角形面均不能为 G 的某

1- 嵌入的无限面. 从而, 充分性得证, 反之, 由引理 8.4.1, 即得必要性. ♮

定理 8.4.1 一个 3- 正则图 $G=(V,E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$ 是 1- 可嵌入的, 当且仅当 $\mu(G_1)\not\cong \Pi_4$, 即正四面体.

证 因为从定理 4.1.1 知 $\mu(G)$ 的所有面皆三角形, 当且仅当 $\mu(G)\cong \Pi_4$, 故, 由引理 4.3.2 即得定理. ♮

若一个标准图之平面对偶也是一个标准图, 则称它为*双标准的*. 若一个图本身与它的平面对偶同构, 则称之为*自对偶的*. 由对偶性可知任何自对偶的标准图皆双标准的. 容易看出, 如图 8.4.1 所示的四种图, 分别记为 $C_{4,t}$, $t\geq 2$, $W_{4,t}$, $t\geq 1$, R_t, $t\geq 1$ 和 $T_t, t\geq 2$, 全是双标准的. 其中, t 为图中平行 4- 圈的数目. 进而, 也易看出, 它们之中的 $W_{4,t}, t\geq 1$, 皆自对偶的.

引理 8.4.3 任何自对偶双标准图 $G=(V,E)$ 恰有 4 个 3 次的节点和恰有 4 个 3 次的面.

证 由自对偶性, 有

$$\nu_3=\phi_3;\quad \nu_4=\phi_4.$$

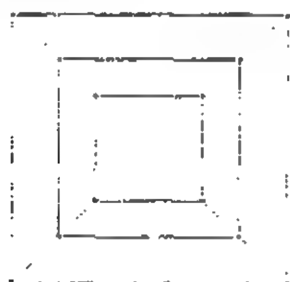
这就导致 $\nu=\nu_3+\nu_4=\phi_3+\phi_4$. 其中, $\nu_3(\phi_3)$ 和 $\nu_4(\phi_4)$ 分别为 3 次和 4 次的节点 (面) 的数目. 从平面上多面形的 Euler 公式, 有

$$3(2\nu_3+2\nu_4)-(3\nu_3+4\nu_4)=4.$$

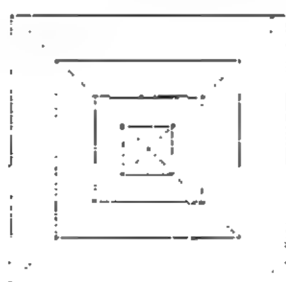
从而, $\nu_3=4$ 和对偶地 $\phi_3=4$. 即得引理. ♮

标准图的一个面, 若它与至少 4 个 3- 节点关联, 则称它为 (标准地)*许可的*; 否则, (标准地)*非许可的*.

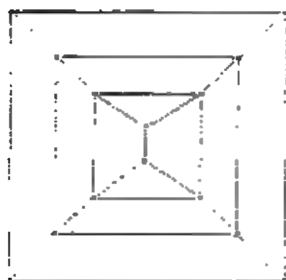
引理 8.4.4 若一个自对偶的标准图 $G=(V,E)$ 有一个 4 次的面是许可的，则存在一个整数 t 使得$G\cong W_{4,t}$.



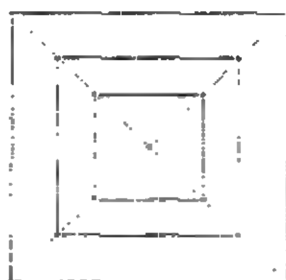
(a) $C_{4,t}, t\geq 2$



(b) $W_{4,t}, t\geq 1$



(c) $R_t, t\geq 1$



(d) $T_t, t\geq 2$

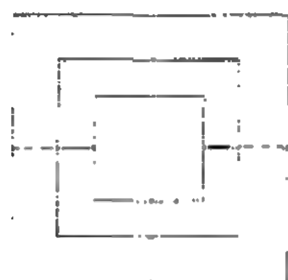
图 8.4.1

证 令面 f_a 是许可的. 由许可性， f_a 边界上四个节点全是 3- 节点. 由引理 8.4.3, 所有不在 f_a 边界上的节点全是 4- 节点. 由自对偶性 τ, G 必有一个 4- 节点 $\tau(f_a)$ 与四个三角形面关联.

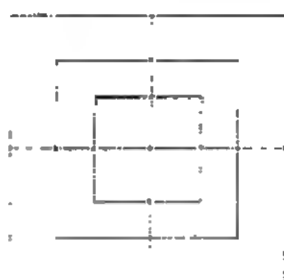
设 $\tau(f_a)$ 的四个相邻的节点就是 f_a 边界上的四个节点. 这时，即为 $W_{4,t}$, $t=1$. 自然，它是自对偶的. 否则，同样地由引理 8.4.3 可知，除 $\tau(f_a)$ 的四个关联三角形外所有其它的面皆四边形. 这就导致 G 只能是 $W_{4,t}$, $t=2,3,\cdots$. 即 $G\cong W_{4,t}$, $t\geq 1$. 定理得证. ▯

引理 8.4.5　一个自对偶的标准图 $G=(V,E)$ 是 1- 可嵌入的，当且仅当 G 有一个 4- 次的面为许可的.

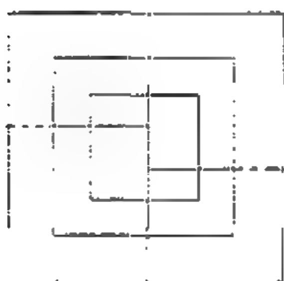
证　因为非许的面不能为标准图的任何 1- 嵌入的无限面，必要性显然. 反之，由引理 8.4.4 知 $G\cong W_{4,t}$, $t\geq 1$. 然，易检验，$W_{4,t}$, $t\geq 1$, 皆 1- 可嵌入的. 事实上，图 8.4.2(b) 提供了 $W_{4,t}$, $t\geq 1$, 的 1- 嵌入. 从而，充分性得证. ▯



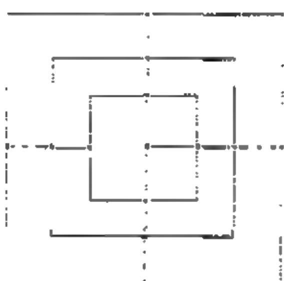
(a) $\mu_1(C_{4,t}), t\geq 2$



(b) $\mu_1(W_{4,t}), t\geq 1$



(c) $\mu_1(R_t), t\geq 1$



(d) $\mu_1(T_t), t\geq 2$

图 8.4.2

定理 8.4.2　一个自对偶标准图 $G=(V,E)$ 是 1- 可嵌入的当且仅当存在一个整数 $t\geq 1$ 使得$G\cong W_{4,t}$.

证　引理 8.4.4-5 的直接结果. ▯

推论 8.4.1　一个自对偶标准图 G 的平面嵌入 $\mu(G)$ 是凸

1- 可扩张的，当且仅当 $\mu(G)$ 的无限面为许可的.

一个 (标准的)暗然形, 用 Ω 表示，就是具有如下性质的极小标准图：所有次不小于 4 的面全是非许可的．自然地，一个双标准暗然形, 记为 B, 就是一个暗然形并且它是双标准图．或者说，它就是每一个次为 4 的面皆非许可的极小双标准图．当然，由于在暗然形中没有一个面可作为它的 1- 嵌入的无限面，所有暗然形均非 1- 可嵌入的.

引理 8.4.6 在每个双标准图中，次为 3 的节点数与次为 3 的面数之和总为 8.

证 由双标准性与平面上多面形的 Euler 公式可得如下的一些方程：

$$\nu_3 + \nu_4 = \nu; \tag{1}$$

$$\phi_3 + \phi_4 = \phi; \tag{2}$$

$$3\nu_3 + 4\nu_4 = 2\varepsilon; \tag{3}$$

$$3\phi_3 + 4\phi_4 = 2\varepsilon; \tag{4}$$

$$\nu - \varepsilon + \phi = 2. \tag{5}$$

由方程 (3) 和 (5) 消去 ε, 可得

$$2\phi = \nu_3 + 2\nu_4 + 4.$$

然后，由 (2) 和从 (3) 与 (4) 中消去 ε, 有

$$\begin{cases} 2\phi_3 + 2\phi_4 = \nu_3 + 2\nu_4 + 4; \\ 3\phi_3 + 4\phi_4 = 3\nu_3 + 4\nu_4. \end{cases}$$

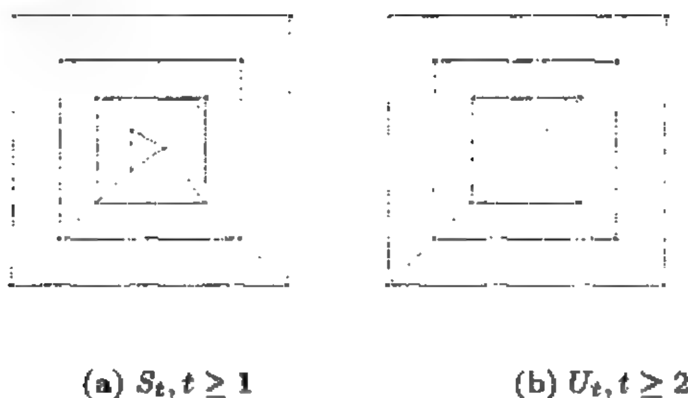
因为 ϕ_4 和 ν_4 可同时从它们中消去，并最后得 $\nu_3 + \phi_3 = 8$. 这就是引理的结论. ♮

引理 8.4.7 一个双标准图 $G = (V, E)$ 是 1- 可嵌入的，当且仅当 G 中没有节点导出子图与一个双标准暗然形 B 同构.

证 因为任何双标准暗然形 B 均非 1- 可嵌入，必要性显然. 只证充分性. 由于 G 没有节点导出子图与 B 同构，G 必有一个四边形面 f_a 为许可的. 而且，G 不可能有构形 $\langle 4,4,4\rangle$. 因为若否，由双标准性必有一个 3- 圈 $C_3 = (v_1, v_2, v_3)$ 为 $\langle 4,4,4\rangle$. 再由双标准性，与 C_3 上三条边关联的那三个面必要么皆四边形，要么皆三角形. 若后者，Π_4 为 G 的一个节点导出子图. 然，Π_4 为双标准暗然形. 若前者，同样理由，C_3 外与它关联的三面也必皆四边形. 又可得一个双标准暗然形为 G 的节点导出子图. 均与 G 的给定条件矛盾. 考虑到只有一个有节点分离对的图是双标准的而且它还是暗然形，这就使我们可以用引理 8.3.12 得知以 f 作为无限面 G 是凸 2- 可扩张的. 由凸性，有凸 2- 扩张可使所有内边皆至多一折. 由 f_a 的许可性，f_a 的边界可以使得每边至多一折. 从而，这个扩张实际上是一个凸 1- 扩张. 充分性得证. ♮

推论 8.4.2 无节点导出子图与某个暗然形 B 同构的双标准图 $G = (V, E)$ 的一个平面嵌入 $\mu(G)$ 是 1- 可扩张的，当且仅当它的无限面是许可的. ♮

引理 8.4.8 一个双标准图 G 没有节点导出子图与某个暗然形 B 同构，当且仅当存在一个整数 $t \geq 1$ 使得 $G \cong W_{4,t}$, $C_{4,t}(t \neq 1)$, R_t, $T_t(t \neq 1)$ 如图 8.4.1 所示和 $S_t, U_t(t \neq 1)$ 如图 8.4.3 所示.



(a) $S_t, t \geq 1$　　(b) $U_t, t \geq 2$

图 8.4.3

证　充分性容易验证. 只证必要性. 因为 G 有一个四边形面 f_a 为许可的. 令 v_1, v_2, v_3 和 v_4 为 f_a 的边界 C_1 上四个节点. 可以假设 f_a 是无限面而不失一般性. 由双标准性, 若与 C_1 关联的四个面不全是四边形, 则有三种情形需要讨论.

情形 1　只有一个是三角形. 当然, 其它三个面必为四边形. 这时, 只能 $G \cong S_1$ 如图 8.4.3(a) 所示.

情形 2　有二个是三角形且它们的边界无公共节点. 当然, 其它两个面必需是四边形. 这时, 只能 $G \cong R_1$(图 8.4.1(c)).

情形 3　有二个三角形面相邻. 由于它们的边界有公共边, 从双标准性知其它二面也需是三角形. 这就导致 $G \cong EW_{4,1}$ (图 8.4.1(b)).

如果与 C_1 关联的四个面皆四边形. 一般地, 设 C_t 为在 C_1 的内部与 C_1 平行的 4- 圈, $t \geq 2$. 则除了导致 $G \cong S_t$, R_t 和 $W_{4,t}, t \geq 2$, 的情形外, 还有三种可能性需要讨论.

情形 4　在 C_t 的内部既无边也无节点. 自然, 只能 $G \cong C_{4,t}$(图 8.4.1(a)).

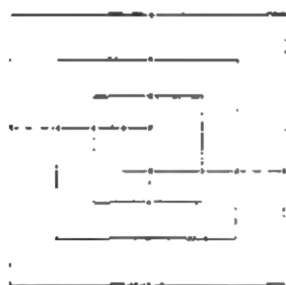
情形 5　在 C_t 内仅有一条边. 这将导致 $G \cong U_t$ (图 8.4.3(b)).

情形 6 在 C_t 的内部有节点. 事实上, 由双标准性只能有一个节点. 这就导致 $G \cong T_t$(图 8.4.1(d)). 综上所述, 即得引理. ♮

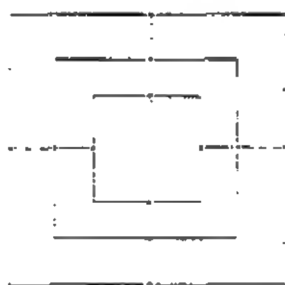
定理 8.4.3 一个双标准图 $G=(V,E)$ 是 1- 可嵌入的, 当且仅当存在一个整数 $t \geq 1$ 使得 $G \cong W_{4,t}$; R_t, S_t, $C_{4,t}(t \neq 1)$, $T_t(t \neq 1)$, 或者$U_t(t \neq 1)$.

证 引理 8.4.7-8 的直接结果. ♮

事实上, 所有 $C_{4,t}$, $t \geq 2$; $W_{4,t}, t \geq 1$; $R_t, t \geq 1$; $T_t, t \geq 2$ 如图 8.4.2(a-d) 和 S_t, t≥ 1; $U_t, t \geq 2$ 如图 8.4.4(a-b) 所示的 1- 嵌入皆凸的.



(a) $\mu_1(S_t), t \geq 1$



(b) $\mu_1(U_t), t \geq 2$

图 8.4.4

推论 8.4.3 一个双标准图 G 是凸 1- 可嵌入的, 当且仅当 G 是 1- 可嵌入的.

证 由推论 8.4.1 和定理 8.4.3 可直接导出. ♮

定理 8.4.4 一个 3- 连通图 $G=(V,E)$ 是凸 1- 可嵌入的当且仅当它是 1- 可嵌入的.

证 必要性是自然的. 只证充分性. 根据 G 的 3- 连通

性，由定理 4.4.2 知其平面嵌入 $\mu(G)$ 是唯一的．由 1- 可嵌入性和许可性，其 1- 扩张的无限面不可能为 (4,4,4) 而且在 $\mu(G)$ 中没有构形 $\langle 4,4,4\rangle$．这样，由定理 8.1.2 以及用与 §8.3 中相仿的方式讨论，可得其凸 2- 扩张实际上是凸 1- 扩张．从而，充分性得证． ♮

尽管更一般的暗然性还可继之作进一步的研究．由于其想法与网格可嵌入性，或者说 0- 可嵌入性密切相关．关于更一般图的 1- 可嵌入性的表征只好留给下一章讨论．

§8.5 注记

8.5.1 本章得到的所有对于给定平面嵌入的无限面的，或对于一般的节点次不超过 4 的图的 k- 可嵌入性与 k- 可实现性的识别均可用来设计从计算复杂性之角度线性时间算法．而且，也可以用来在已知 k- 可嵌入的条件下设计线性时间算法求出一个 k- 嵌入， $k\geq 1$．其中，不会遇到大的困难．多数结果在 [LMS1-2] 和 [LMPS1-2] 中第一次出现．然而，关于纵横凸性的所有结果全是新的而且一些已有的结论和证明均被改进与简化．当然，我们也可以从第七章所提供的确向术的思路设计算法．

8.5.2 这里所讨论的问题看上去可应用到超大规模集成电路设计，建筑上砌地板，编织图案以及算法框图之美观布局等方面 [BN1,BTT1, CKC1, DuZ1, HuK1, Ow1, RT1, SL1, Sto1, Ta1, WL1, 等]．然而，这里所关心的只是理论上的处理．事实上，几乎是只考虑 3- 正则图就够了．也许有人会想到任意节点次至多为 $2l$ 的图在 l- 维空间中， $l\geq 3$, 的 k- 可嵌入性的问题．虽然目前尚未见到引人注目的结果，但可以想象一些相仿

的结果不难得到.

8.5.3 还可以提出将一个图嵌入到平面上的砌合中的问题. 例如, 三角形砌合, 六角形砌合等.

8.5.4 假若节点在平面的格子点上的位置已经确定, 判定是否存在或求出一个 1- 嵌入使得每一边都恰用一折的问题可以转化为确定一个二次布尔方程是否有解以及求出一个解的问题 [LMPS2, Liu28]. 事实上, 恰有一折的限制是不必要的. 当然, 也许为其它问题提供了一种解决途径 [HL1-2, HLS1-3].

8.5.5 近来, 已经出现了一些算法. 关于求 3- 正则可平面图的 1- 嵌入的线性时间算法可参见 [LMP1]. 对于一般标准图, 求它们的 3- 嵌入和 2- 嵌入也已经得到了线性算法 [CL1, LMS3].

8.5.6 进一步的最优化问题将在第十三章中讨论.

第九章

网格可嵌入性

§9.1 许可性

与前一样，我们仍先研究 3- 连通的可平面标准图. 对于这种图的一平面嵌入 $\mu(G)$, 若它的一个面 f 的边界有一个 k-嵌入 $\mu_k(f)$ 使得： $\forall v \in V(f)$,

$$St(v;f) = \begin{cases} 2, \text{ 当 } \rho(v,G) = 4; \\ \\ 1, \text{ 或 } 2, \text{ 当 } \rho(v;G) = 3, \end{cases} \tag{9.1.1}$$

则称它为 k-**许可的**; 否则， k-**非许可的**, $k \geq 0$. 对于一个圈 C, 它可以是 $\mu(G)$ 的一个面的边界，用 $\rho_{in}(v;\mu C)$ $(\rho_{out}(v)\mu C))$ 表示在 C 的内 (外) 部区域 $C_{in}(C_{out})$ 中与 v 关联的边数. 则，我们可以将许可性推广到对于 C. 若 C 有一个 k- 嵌入 $\mu_k(C)$ 使得： $\forall v \in V(C)$,

$$\rho_{in}(v;\mu C) \leq St(v;C) \leq 2 - \rho_{out}(v;\mu C), \tag{9.1.2}$$

则称 C 是 k-**许可的**; 否则， k-**非许可的**. 由这个定义，即可得

出，一个面 f 是 k- 许可的就是指当将 f 视为无限面时，它的边界圈是 k- 许可的.

引理 9.1.1　对于 3- 连通标准图 $G=(V,E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$, 一个面 f 是 1- 许可的，当且仅当

$$\nu_4(f;\mu C)\le \nu(f)-4. \tag{9.1.3}$$

其中，$\nu(f)$ 和 $\nu_4(f)$ 分别为 f 的边界上节点的数目和次为 4 的节点的数目.

证　由于任何纵横多边形含有偶数条直线段，一个 $2l$- 边形内角之和为 $(l+1)\pi$. 则，任何纵横 $2l$- 边形有 $l-2$ 个内节点和 $l+2$ 个外节点. 而且，每个纵横多边形都有四条直线段使得每条之二端皆外节点. 由标准性，只有 3- 节点允许在一个 1- 嵌入的无限面边界上为直的. 从而，至多要有一个 3- 节点在这四条之任何一条直线段上. 这就得到了 (9.1.3), 即必要性成立.

反之，由 (9.1.3) 我们总可求得 f 的面边界圈的一个 1- 嵌入使得所有 4- 节点均为它的内节点，而其它的，即 3- 节点中至少有 4 个为它的直节点. 这就得到了充分性. ♮

令 C 为标准图 $G=(V,E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$ 中的一个圈，在 C 上的一个 4- 节点 v, 若满足

$$\rho_{in}(v;\mu C)=2,\ \rho_{in}(v;\mu C)=\rho_{out}(v;\mu C)=1,$$

$$\text{或者 } \rho_{out}(v;\mu C)=2,$$

则分别称 v 为确内，确直，或确外节点. 因为在这时，v 在 C 上总是要分别处于内，直，或外状态. 记 $\nu_{in}(C,\mu G)$, $\nu_{out}(C,\mu G)$ 和 $\nu_{st}(C,\mu G)$ 分别为 $\mu(G)$ 中 C 上的确内，确外和确直节点的

数目.

引理 9.1.2 在 3- 连通标准图 $G=(V,E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$ 中，一个非面边界的圈 C 是 1- 非许可的当且仅当

$$\begin{cases} \nu_{out}(C;\mu G)=0; \\ \nu_{st}(C;\mu G)=3; \\ \nu_{in}(C;\mu G)=\nu(C)-3. \end{cases} \tag{9.1.4}$$

证 设 C 为 $\mu(G)$ 中的一个 1- 非许可的圈. 由 3- 连通性，在

$$V_{op}(C)=\{v|\forall v\in V(C),\ \rho_{out}(v;\mu C)>0\}$$

中至少有三个节点. 并且，有如下的事实.

事实 1 $|V_{op}(C)|=3$. 否则，若 $|V_{op}(C)|>3$, 则在 C 的 1- 嵌入中至少四个节点可以处直的，或外的状态. 由引理 9.1.1, C 是 1- 许可的. 与 C 的给定条件矛盾.

事实 2 $\nexists v\in V_{op}(C)$, $\rho_{in}(v;\mu C)=0$. 否则，若 v_1 满足 $\rho_{in}(v_1;\mu C)=0$. 令 v_1,v_2,v_3 为 $V_{op}(C)$ 中的那三个节点 (事实 1). 且，它们的这个次序与在圈 C 上出现的一致. 这样，只要讨论如下三种可能情形就够了：

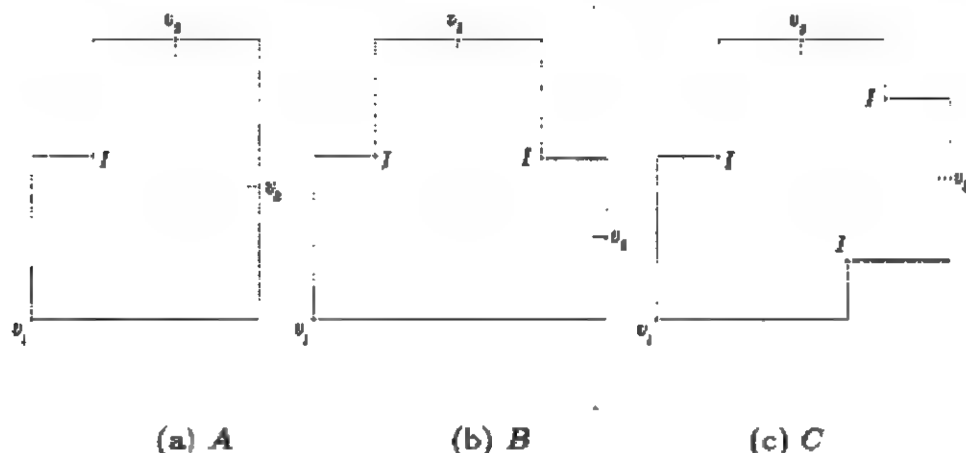
$$A.\quad v_1Iv_2v_3;\qquad B.\quad v_1Iv_2Iv_3;\qquad C:\quad v_1Iv_2Iv_3I.$$

其中，I 表示一个确内节点. 然而，所有这些情形均导致 C 为 1- 许可的，如图 9.1. 1 所示.

事实 3 所有 C 上的节点在 G 中皆 4- 节点. 否则，若在 C 上有一个节点的次不是 4, 则由引理 9.1.1 必导致 C 是 1- 许可的.

由上述事实 1–3 即得 C 满足 (9.1.4). 必要性得证.

反之，若将 C 视为 $\mu(G_{in})=\mu(C)\cup\mu(C_{in}\cap G)$ 的无限面边界. 由于这时， (9.1.4) 导致 (9.1.3) 不成立. 从引理 9.1.1 即得充分性. ♮



(a) A　　(b) B　　(c) C

图 9.1.1

定理 9.1.1 一个 3- 连通标准图 $G=(V,E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$ 是 1- 可扩张的，当且仅当它没有一个非面边界的圈是 1- 非许可的而且无限面是 1- 许可的.

证 从引理 9.1.2 的证明中之事实 1–3 可见 (9.1.4) 提供了一个构形 $\langle 4,4,4\rangle$. 由上一章所讨论的可知，若有一个非面边界的圈是 1- 非许的，则 $\mu(G)$ 不可能是 1- 可扩张的. 当然，无限面若不是 1- 许可的也不能得到 $\mu(G)$ 的一个 1- 扩张. 从而，必要性成立.

反之，由 $\mu(G)$ 的无限面 f_0 的 1- 许可性，从引理 9.1.1 可知 f_0 满足 (9.1.3). 因此，不可是三角形 (4,4,4). 进而，由于没有构形 $\langle 4,4,4\rangle$, 从定理 8.3.2 可知 $\mu(G)$ 是凸 2- 可扩张的. 因为 f_0 是 1- 许可的，则这个扩张实际上是一个凸 1- 扩张. 故，$\mu(G)$ 是 1- 可扩张的. ♮

下面，我们看一看对于 1- 可嵌入性的禁用构形的完备集是什么样的. 首先，如前所讨论的，任何暗然形皆这里的禁用构形. 由引理 9.1.1, 一个暗然形, 也用 Ω 表示，实际上是这样的一个极小子图 (当然是标准的) 使得它的每个面的边界上至多有三个次为 3 的节点，因为任何三角形面自然均至多有三个 3- 节点. 所有无分离三角形的极大标准可平面图对于 1- 可嵌入性皆暗然形. 事实上，只有三个这样的图. 即，Π_4, Π_8, 和 Π_{4+v}. 后者就是在 Π_4 的一个面的内部区域引进一个新节点并与此面边界上三节点连上这三条边所得的图. 其理由与引理 8.4.6 的中用过的相仿.

如果一个标准图 $G=(V,E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$ 中的圈 C 上所有节点皆 4- 次的而且其中有三个节点 $v_i, i=1,2,3$, 使得：$\forall v \in V(C)$,

$$\rho_{out}(v;\mu C)=\begin{cases}2,\ 若\ v\neq v_i,\ i=1,2,\ 和\ 3;\\ \\ 1,\ 若\ v=v_i,\ i=1,2,\ 或\ 3,\end{cases} \tag{9.1.5}$$

则称 C 是一个 外$\langle 4,4,4\rangle$—圈, 并用 $\langle 4,4,4\rangle_{out}$ 表示. 相应地，构形 $\langle 4,4,4\rangle$ 也称为 内$\langle 4,4,4\rangle$—圈, 并用 $\langle 4,4,4\rangle_{in}$ 表示. 如图 9.1.2(a) 中的 X 和 Y 皆 $\langle 4,4,4\rangle_{in}$ 和 (b) 中的 Y 为一个 $\langle 4,4,4\rangle_{out}$. 事实上，外 $\langle 4,4,4\rangle$— 圈就是对无限面内部区域中一面作无限面时的内 $\langle 4,4,4\rangle$— 圈. 将此二类圈统称为 单侧$\langle 4,4,4\rangle$—圈. 并简记为 S-$\langle 4,4,4\rangle$.

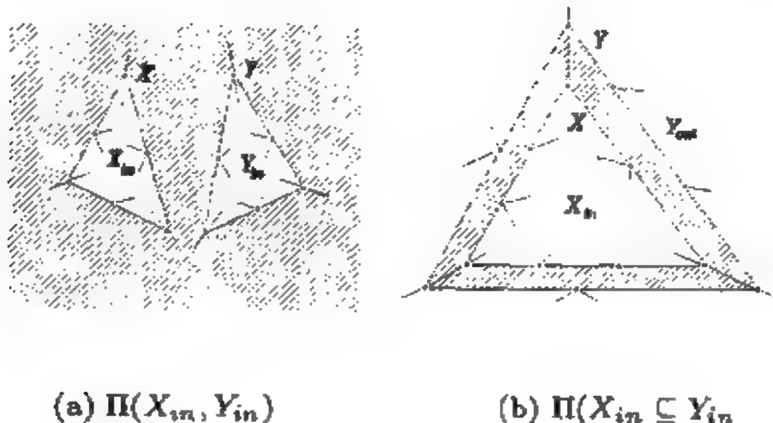
引理 9.1.3 令 X 和 Y 为一个标准图 $G=(V.E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$ 中的两个 S-$\langle 4,4,4\rangle$. 则，有

$$X_{in}\not\subseteq Y_{in}\Longrightarrow X_{in}\subseteq Y_{out}. \tag{9.1.6}$$

证　用反证法. 设 X 和 Y 满足关系

$$X_{in}\cap Y_{in}\neq\emptyset;\qquad X_{in}\cap Y_{out}\neq\emptyset.$$

由对称性, 不妨假设 X 是一个 $\langle 4,4,4\rangle_{in}$. 因为在 X 上除 v_i, $i=1,2,3$, 外每个节点都有两条边在 X_{in} 中. 考虑到 Y 在 X_{in} 和 X_{out} 中都有边, 由 Jordan 曲线定理, X 和 Y 只能恰有 v_i, $i=1,2,3$, 中的二个节点公共. 这就与 G 的 3- 连通性矛盾. ▯



(a) $\Pi(X_{in},Y_{in})$　　　　(b) $\Pi(X_{in}\subseteq Y_{in}$

图 9.1.2

如果 X 是 $\langle 4,4,4\rangle_{in}$ 和 Y 为 $\langle 4,4,4\rangle_{out}$ 使得 $X_{in}\subseteq Y_{in}$, 则称它们为一个 $\langle 4,4,4\rangle$—环, 如图 9.1.2(b) 所示. 且, 用 $\Pi(X_{in}\subseteq Y_{in})$ 表示. 如果 X 和 Y 皆 $\langle 4,4,4\rangle_{in}$ 并使得 $X_{in}\cap Y_{in}=\emptyset$, 则称它们为 $\langle 4,4,4\rangle$—眼, 如图 9.1.2(a) 所示. 并用 $\Pi(X_{in},Y_{in})$ 表之. 进而, 如对于一个 $\Pi(X_{in}\subseteq Y_{in})$, 若在 $Y_{in}-X_{in}$ 中不再有 $\langle 4,4,4\rangle$—环, 或者对于 $\Pi(X_{in},Y_{in})$, 若在 $X_{in}\cup Y_{in})$ 中不再有 $\langle 4,4,4\rangle$—眼, 则这时的 $\Pi(X_{in}\subseteq Y_{in})$ 和 $\Pi(X_{in},Y_{in})$ 简单地用 Π 表示.

引理 9.1.4　*在一个 3- 连通的标准图 $G=(V,E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$ 中, 对于 G 的 1- 可嵌入性 Π 是禁用构形.*

证　设 $\Pi=\Pi(X_{in}\subset Y_{in})$. 因为 X 是 $\langle 4,4,4\rangle_{in}$, 由引理

9.1.1 知 X 对于 $X_{in}(G)=(X\cup X_{in})\cap\mu(G)$ 是 1- 非许可的. 从而, $\mu(G)$ 对于 X_{out} 内的任何面作为无限面均不是 1- 可扩张的. 另一方面, 因为 Y 是 $\langle 4,4,4\rangle_{out}$, 由引理 9.1.1 知 Y 对于 $Y_{out}(G)=(Y\cup Y_{out})\cap\mu(G)$ 是 1- 非许可的. 从而, Y 对于 Y_{in} 中的任何面作为无限面均非 1- 可扩张. 由定理 4.3.3, 即 $\mu(G)$ 之唯一性, G 不是 1- 可嵌入的.

若 $\Pi=\Pi(X_{in},Y_{in})$, 相仿地也可得 $\mu(G)$ 对任何面作为无限面均不是 1- 可扩张的. 因此, G 不是 1- 可嵌入的.

综上所述, Π 为 G 对于 1- 可嵌入的禁用构形. 从而, 引理得证.

定理 9.1.2 一个 3- 连通的标准可平面图 $G=(V,E)$ 是 1- 可嵌入的当且仅当 G 既无 Ω 作为一个节点导出子图也无构形 Π.

证 由引理 9.1.1 和引理 9.1.4 即可得必要性, 反之, 若 $\mu(G)$ 的所有面皆 1- 非许可的, 则若 G 本身不是 Ω 就存在一个节点导出真子图为 Ω. 与给定的条件矛盾. 假设 f 是 $\mu(G)$ 的一个面且它是 1- 许可的. 若对于 $f,\mu(G)$ 没有圈 X 为 $\langle 4,4,4\rangle_{in}$, 则由定理 9.1.1 知 $\mu(G)$ 对于 f 作为无限面是 1- 可扩张的. 因为 $\mu(G)$ 没有 $\Pi(X_{in},Y_{in})$, 由引理 9.1.3 我们可以假设 X 是这样的 $\langle 4.4.4\rangle_{in}$ 使得在 X_{out} 中没有 $\langle 4,4,4\rangle_{in}$. 因此, 所有包括 f 在内的在 X_{out} 中的面皆不能作为某 1- 嵌入的无限面. 再看 X_{in} 中的面. 如果它们皆 1- 非许可的, 则在 $X_{in}(G)$ 中必有 Ω 作为节点导出子图. 与给定条件矛盾. 设 f_1 为 X_{in} 中的一个面且为 1- 许可的. 由于 G 没有 $\Pi(X_{in}\subseteq Y_{in})$, 从引理 9.1.3, 与对 f 的讨论相仿地, 可以假设 X_1 为 X_{in} 中的一个对于 f_1 作为无限面时的 $\langle 4.4.4\rangle_{in}$ 使得在 X_{1in} 中没有 $\langle 4.4.4.\rangle_{in}$. 则, 所有 X_{1in} 中的面, 包括 f_1 在内, 均不能为 G 的某个 1- 嵌入的无限面.

若所有 $X_{in} \cap X_{1out}$ 中的面皆 1- 非许可的则必出现 Ω. 故，设 f_2 为 $X_{in} \cap X_{1out}$ 中的一个面且是 1- 许可的. 当然，若对 f_2 作无限面 $\mu(G)$ 无 $\langle 4.4.4 \rangle_{in}$, 则由定理 9.1.1 可知 $\mu(G)$ 是 1- 可扩张的. 否则，继续上述过程，由面的数目的有限性. 根据既无 Ω 又无 Π, 必最终得到一个面使得以它为无限面 G 是 1- 可扩张的. 从而，G 是 1- 可嵌入的. 这就得到了充分性. ▮

推论 9.1.1 任何 4- 正则可平面图 $G = (V, E)$, 或者更一般地，任何至多有三个 3- 节点的标准图均非 1- 可嵌入的.

证 因为所有面皆 1- 非许可的，G 必含有 Ω 作为节点导出子图. 由定理 9.1.2, 即得推论. ▮

然而，若一个标准可平面图只有四个 3- 节点，则它就可能有 1- 嵌入了. 事实上，$W_{4,t}$, $t \geq 1$, 就是这样一类图. 它们的 1- 嵌入如图 8.4.2(b) 所示.

为了讨论一般可平面图的 1- 可嵌入性，当然节点之次不超过 4, 我们可以先推广定理 9.1.1 到不限于 3- 连通的一般情形. 再根据 §4.4 中所描述的理论考虑所有可能的平面嵌入. 用与上一章相仿的方法引伸到 1- 可嵌入性.

§9.2 隅序列

关于图的 0- 可嵌入性，或者说 *网格可嵌入性*, 因为任何标准可平面图皆非 0- 可嵌入的，这一点在下面的讨论中将会看到，我们这里所讨论的图总是允许有 2- 节点. 当然，0- 可嵌入的图总可以从一个 k- 可嵌入的图，$k \geq 1$, 经过将边加以细分而得到. 一个存在 0- 嵌入的图也称为 *网格的*.

首先，我们研究一个圈的 0- 嵌入. 可以看出，任何三角形，即长为 3 的圈绝无 0- 嵌入. 因为在 *格图*, 即平面上整格的

表示图，上的最短圈之长为 4. 因此，这里所研究的图均指无三角形的．当然，仍要满足节点的次不大于 4.

令 $\mu_0^c(C)$ 是圈 C 的一个 0- 嵌入，则在 C 上的节点总可划分为三个部分：一部分，用 S 表示，由所有那些与内角 π 关联的节点组成的；另外二部分，用 I 和 O 表示，分别由所有那些关联内角为 $3\pi/2$ 和 $\pi/2$ 的节点组成．若不考虑状态 S 的节点，则在 $\mu_0^c(C)$ 上依例如顺时针走向，就可得一个由 I 和 O 组成的循环序列．这样的，一个序列被称为 $\mu_0^c(C)$ 的 *隅序列*. 对于一个给定的由 I 和 O 组成的循环序列 Seq, 令 $n_O(Seq)$ 和 $n_I(Seq)$ 分别为 O 和 I 在 Seq 中出现的次数．若 Seq 是某圈的隅序列，则它本身也被称为 *隅序列*.

引理 9.2.1 一个循环序列 Seq 是隅序列，当且仅当它含有偶数个字母，即长度为偶且满足

$$n_O(Seq) - n_I(Seq) = 4. \tag{9.2.1}$$

证 先证必要性．令 m 为 Seq 的长度．因为 Seq 是一个隅序列，在格图上有一个 m- 边形， $m \geq 4$, 以 Seq 为它的隅序列．假设在这个 m- 边形中有 k 条水平线段．因为每个节点恰与一个水线段关联和每个水平线段恰与二个节点关联，则 $m = 2k$, $k \geq 2$. 又，因为其内角和为 $2(k-1)\pi$ 且其中有 $k-2$ 个角为 $\dfrac{3\pi}{2}$ 和 $k+2$ 个角为 $\dfrac{\pi}{2}$. 注意到 $n_O(Seq)$ 和 $n_I(Seq)$ 实际上分别为 $\dfrac{3}{2}\pi$ 和 $\dfrac{\pi}{2}$ 角的数目．从而，有 (9.2.1).

再证充分性．对 Seq 的长度用归纳法．若其长为 4, 则只有一个可能，即 $Seq = OOOO$. 它是一个矩形的隅序列．设任何长度为 $2l$, $l \geq 2$, 且满足 (9.2.1) 的序列均为一个隅序列．我们看长为 $2(l+1)$ 的且满足 (9.2.1) 的序列 Seq. 首先，由 (9.2.1) 知在 Seq 上有 "OI" 作为一段．若将此段去掉，则所得的序列

Seq' 长为 $2l$ 且仍满足 (9.2.1). 由归纳法假设， Seq' 是一个隅序列. 为方便，可以设 Seq 具有以下形式

$$Seq' = X_1 X_2 \cdots X_{2l}.$$

则， Seq 可以看作

$$Seq = Seq' X_{2l+1} X_{2l+2},$$

其中 $X_{2l+1} = O$ 和 $X_{2l+2} = I$. 令 Seq' 为某圈 $C_{2l} = v_1, v_2 \cdots v_{2l}$ 的一个 0- 嵌入 $\mu_0^{\zeta}(C_{2l})$ 的隅序列使得 v_i 的状态为 $X_i, i = 1, 2, \cdots, 2l$. 根据 X_1 和 X_{2l} 的所有四种可能的选择：

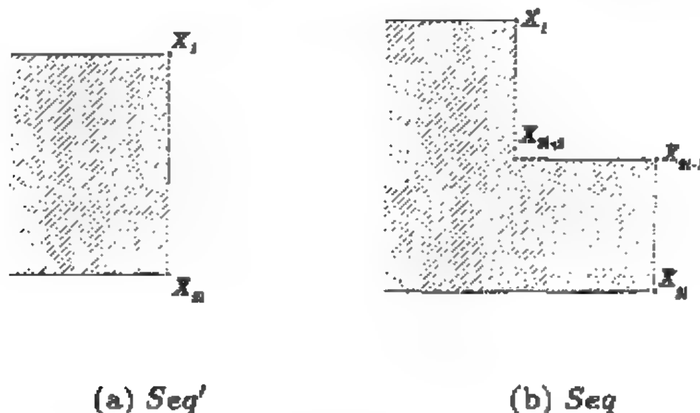
A1. $X_1 = O$ 和 $X_{2l} = O$;

A2. $X_1 = I$ 和 $X_{2l} = O$;

A3. $X_1 = O$ 和 $X_{2l} = I$;

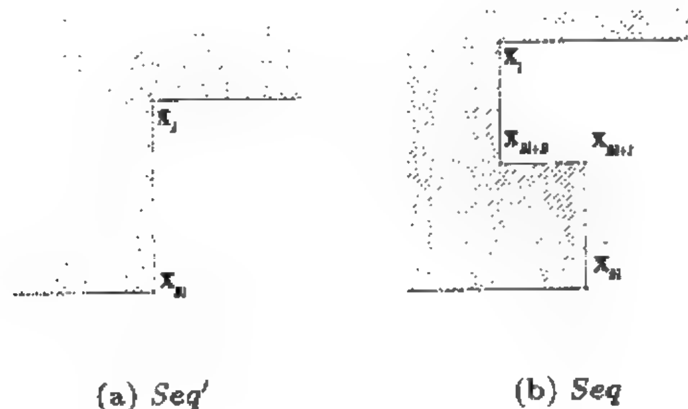
A4. $X_1 = I$ 和 $X_{2l} = I$,

我们总能找到 $C_{2l+2} = v_1 v_2 \cdots v_{2l} v_{2l+1} v_{2l+2}$ 的一个 0- 嵌入 μ_0^{ζ} (C_{2l+2}) 以 Seq 为隅序列，分别由图 9.2.1-4 表之. ▯



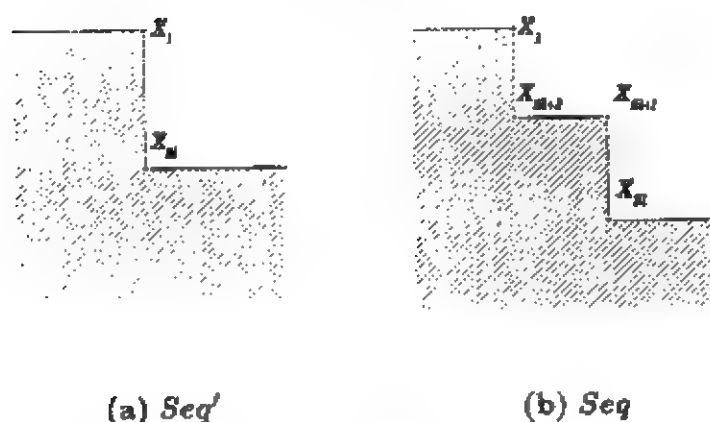
(a) Seq' (b) Seq

图 9.2.1



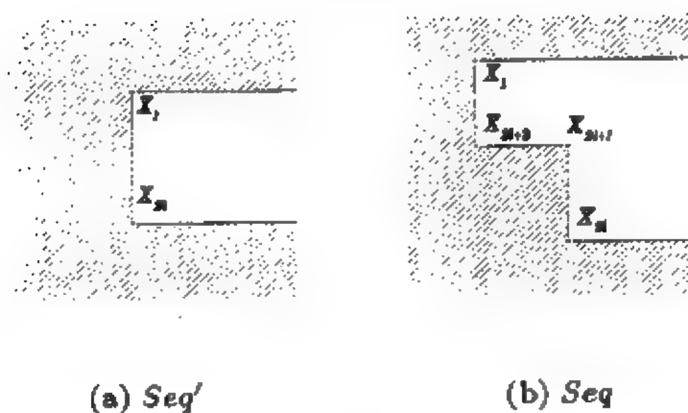
(a) Seq' (b) Seq

图 9.2.2



(a) Seq' (b) Seq

图 9.2.3



(a) Seq' (b) Seq

图 9.2.4

一个由 O 和 I 组成的循环序列，若任何 I 均不与 I 相继，即 II 不是它的一段，则称它为 I–孤立的. 若一个由 O 和 I 组成的循环序列是某纵横凸多边形的隅序列，则也称它本身为凸

的.

引理 9.2.2　一个由 O 和 I 组成的序列 Seq 是凸的，当且仅当它是一个隅序列而且它还是 I- 孤立的.

证　先证必要性. 由序列凸性之定义第一个说法是显然的. 用反证法证第二个说法. 假设在 Seq 中有一段 II. 令 Seq 为 $C_{2l} = v_1 v_2 \cdots v_{2l}$ 的隅序列且 v_1 和 v_2 为状态 I. 自然，不失一般性. 则，这时实质上只有图 9.2.5 所示的两种可能形式. 然，它们均导致与凸性之条件矛盾.

次证充分性. 对 $Seq = X_1 X_2 \cdots X_{2l}$, $l \geq 2$, 的长度用归纳法. 若 $l = 2$, 只能 $Seq = OOOO$. 它是 I- 孤立的. 自然，因为它是矩形的隅序列可知它本身为凸的. 一般地，设对于长度不大于 $2l$, $l \geq 2$, 的序列充分性为真. 我们可以限定

$$Seq = X_1 X_2 \cdots X_{2l+1} X_{2l+2}$$

使得 $X_{2l+1} = O$ 和 $X_{2l-2} = I$. 事实上，这种限定并不失一般性. 因为由引理 9.2.1 知 Seq 至少有一个 I. 不妨取 $X_{2l+2} = I$. 当然，由 I- 孤立性，必有 $X_1 = O$. 容易看出，从 Seq 中去掉 X_{2l+1} 和 X_{2l+2} 之后所得的

$$Seq' = X_1 X_2 \cdots X_{2l}$$

仍然是 I- 孤立的. 而且，由引理 9.2.1 还知 Seq' 也是隅序列. 由归纳假设 Seq' 是凸的. 令 Seq' 为格图上的 $2l$- 边形 $C_{2l} = v_1 v_2 \cdots v_{2l}$ 的隅序列使得 X_i 为 v_i 的状态， $i = 1, 2, \cdots, 2l$. 然而，在 Seq' 上只有二种可能： $X_{2l} = O$ 和 $X_{2l} = I$. 不管怎样，对于它们均得 Seq 是凸的如图 9.2.6-7 所示.　□

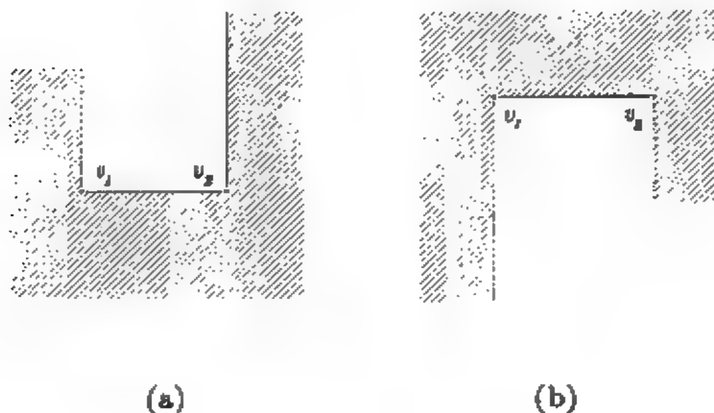
定理 9.2.1　图 $G = (V, E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$ 中的一个面

f 是 0- 许可的，当且仅当其边界上所有节点的次均小于 5 并且满足关系：

$$n_{2-val}(f) \geq n_{4-val}(f) + 4. \tag{9.2.2}$$

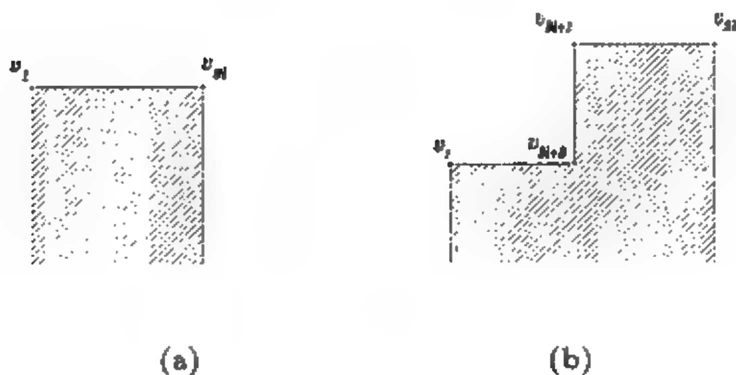
进而，当 f 取为无限面边界时，若将 $i, 0 \leq i \leq n_{2-val}(f)$，个 2- 节点限制为状态 S 和 $j, 0 \leq j \leq n_{3-val}(f)$，个 3- 节点限制为状态 I. 则 f 是 0- 许可的，当且仅当 f 的边界上所有节点的次皆小于 5 且满足关系：

$$n_{2-val}(f) - i \geq n_{4-val}(f) + j + 4. \tag{9.2.3}$$



(a) (b)

图 9.2.5

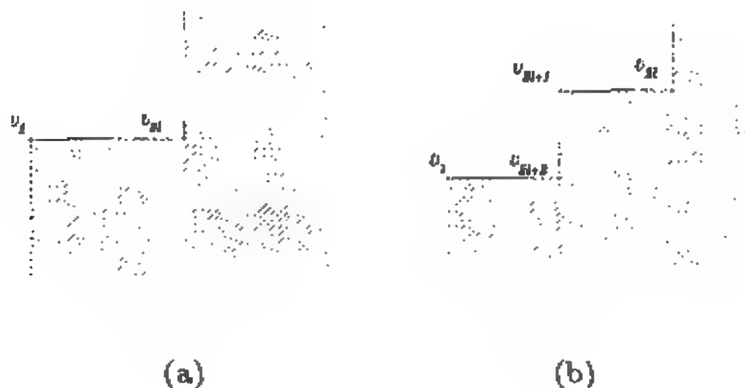


(a) (b)

图 9.2.6 $X_{2l} = O$

证 因为在一个 0- 嵌入中，无限面边界上的任何 4- 节

点必需处状态 I 和只有 2- 节点允许处状态 O. 由 (9.2.1) 可得 (9.2.2). 这就是第一个结论的必要性. 反之，取 $n_{2-val}(f) - n_{4-val}(f) - 4$ 个 2- 节点和所有 3- 节点处状态 S, 由引理 9.2.1 即得这个结论的充分性.



(a) (b)

图 9.2.7 $X_{2l} = I$

进而，由引理 9.2.1 和第一个结论，即可得定理的后一个结论. □

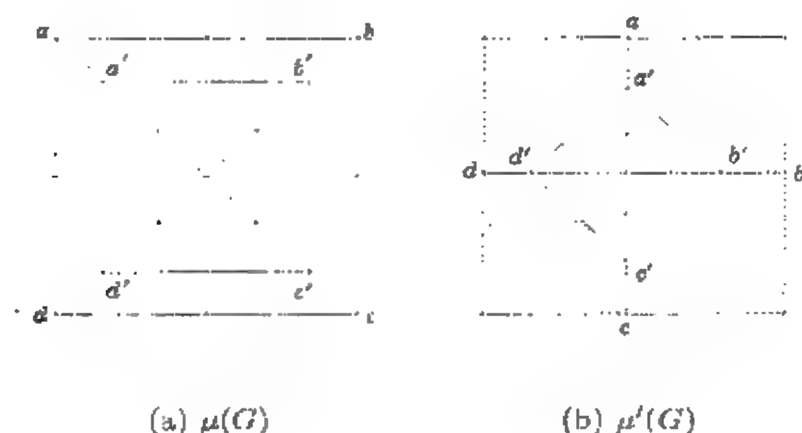
相仿地，我们也可以建立一个面的凸 0- 许可性. 在 f 的边界上的一个节点子集, 如果其中任何一对节点在 f 的边界上均不相邻 (亦即不相继), 则称它对于 f 是独立的.

定理 9.2.2 图 $G=(V,E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$ 的一个面 f 是凸 0- 许可的，当且仅当 f 是 0- 许可的而且在 f 的面边界上所有 4- 节点的集合对 f 是独立的. 进而，一个面 f 是凸 0- 许可的且满足条件：其边界上有 $i, 0 \le i \le n_{2-val}(f)$, 个 2- 节点处状态 S 和 $j, 0 \le j \le n_{3-val}(f)$, 个 3- 节点处于状态 I, 当且仅当 f 是 0- 许可的且满足这个条件以及其边界上的由所有 4- 节点与 j 个 3- 节点组成的集合对 f 为独立的.

证 由引理 9.2.2 和定理 9.2.1 可直接导出. □

§9.3 一般判准

首先，我们讨论一个图 G 的平面嵌入 $\mu(G)$ 的 0- 可扩张性. 当然，G 的所有节点的次仍不超过 4 而且不存在三角形作了节点导出子图. 由上一节所得到的，对于 0- 可扩张性，$\mu(G)$ 的无限面必需满足条件 (9.2.2). 但，它显然不是充分的. 如图 9.3.1(a) 所示的图满足 (9.2.2) 且没有 0- 扩张. 事实上，在图 9.3.1(a) 中四个带阴影的面，由于它们边界上的所有节点都必须为状态 O. 从 (9.2.1) 知不能将它们作为某 0- 嵌入中的有限面，如图 9.3.1(b) 所示.



(a) $\mu(G)$　　(b) $\mu'(G)$

图 9.3.1

这就建议我们考察所谓一个面的内 0- 许可性. 在一个平面嵌入中的一个面 f, 如果它可以为某个 0- 嵌入的有限面，就称 f 为 内0-许可的.

引理 9.3.1 节点次不大于 4 无三角形图 G 的平面嵌入 $\mu(G)$ 的一个面 f 是内 0- 许可的并且使得在其边界上有 j, $0 \le j \le n_{3-val}(f)$, 个 3- 节点处状态 O, 当且仅当它满足如下的不等式:

$$n_{2-val}(f) \geq n_{4-val}(f) + j - 4. \tag{9.3.1}$$

证 因为任一 4- 节点在 0- 嵌入中的有限面边界上必需处状态 O, 任何 3- 节点有两个选择：状态 O, 或状态 S, 和 2- 节点可选三种状态之一，由 (9.2.1) 即得必要性. 反之，若有 $n_{4-val}(f) + j - 4$ 个 2- 节点选择处状态 I, 所有 4- 节点和 j 个 3- 节点处状态 O, $0 \leq j \leq n_{3-val}(f)$, 和所有 2- 节点与其它 3- 节点均处状态 S, 则由 (9.2.1) 我们也可求得一个纵横多边形在某 0- 嵌入中作为面 f 的边界. 从而，充分性得证. ♮

由于 4- 节点在 0- 嵌入 $\mu_0(G)$ 中的四个关联面内的关联角皆 $\frac{\pi}{2}$ 和一个 4- 面，即次为 4 的面，若作为无限面其内 4 个角皆 $\frac{3\pi}{2}$; 否则，四个角必均为 $\frac{\pi}{2}$, 我们可以只讨论那些次小于 4 的节点和次大于 4 的面在 $\mu_0(G)$ 中的分布. 令

$$\text{def }(v) = 4 - \rho(v; G).$$

并称之为节点 v 在 G 中的 亏数. 同时，令

$$\text{res }(f) = \rho(f; \mu G) - 4.$$

并称之为面 $f \in F$ 在平面嵌入 $\mu(G)$ 中之 赢数. 其中， F 为 $\mu(G)$ 的面的集合.

引理 9.3.2 对于图 $G = (V, E)$ 的一个平面嵌入 $\mu(G)$, 总有

$$\sum_{v \in V} \text{def }(v) - \sum_{f \in F} \text{res }(f) = 8. \tag{9.3.2}$$

证 由于每边有二个端点，从节点亏数之定义可知

$$4\nu(G) = \sum_{v\in V} \text{def}\,(v) + \sum_{v\in V} \rho(v;G)$$

$$= \sum_{v\in V} \text{def}\,(v) + 2\varepsilon(G). \tag{9.3.3}$$

对偶地，有

$$4\phi(G) = \sum_{f\in F} \rho(f;\mu G) - \sum_{f\in F} \text{res}\,(f)$$

$$= 2\varepsilon(G) - \sum_{f\in F} \text{res}(f). \tag{9.3.4}$$

从而，由 (9.3.3-4) 和对于平面嵌入的 Euler 公式，可得

$$\sum_{v\in V} \text{def}\,(v) - \sum_{f\in F} \text{ref}\,(f) = 4(\nu(G) - \varepsilon(G) + \phi(G)) = 8.$$

这就是 (9.3.2). □

对于图 $G = (V, E)$ 的一个平面嵌入 $\mu(G)$, 关系 (9.3.2) 被称为 $\mu(G)$ 的 **均衡性**. 记

$$eq = 8 + \sum_{f\in F} \text{res}\,(f) = \sum_{v\in V} \text{def}\,(v).$$

并称之为 $\mu(G)$ 的 **均衡值**. 若在均衡性中满足：

$$\begin{cases} \text{def}\,(v) \geq 0, & \forall v \in V; \\ \text{res}\,(f) \geq 0, & \forall f \in F, \end{cases} \tag{9.3.5}$$

则称之为 **正的**. 容易看出，只有正均衡性的图才有可能有 0- 嵌入.

下面，我们着手探究在每个亏数大于 0 的节点处或赢数大于 0 的面中角的分配. 由于显节点对于我们这里的目标无关紧要. 自然，总假设图 G 没有显节点. 这样在 G 的任何 0– 嵌入 $\mu_0(G)$ 中，所有的角都只能取 $\pi/2, \pi$, 或 $3\pi/2$ 这三个可能值. 令 $\mathcal{A}(\mu_0 G)$ 为 $\mu_0(G)$ 中所有角的集合以及 $\mathcal{A}(f;\mu_0 G)$ 和 $\mathcal{A}(v;\mu_0 G)$ 分别为在面 f 内的和与节点 v 关联的集合. 为方便，我们在 $\mathcal{A}(\mu_0^{\sim} G)$ 上引进一个整函数 θ: $\forall A \in \mathcal{A}(\mu_0 G)$,

$$\theta(A) = \begin{cases} 0, & \text{当 } A = \dfrac{\pi}{2}; \\ 1, & \text{当 } A = \pi; \\ 2, & \text{当 } A = \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases} \tag{9.3.6}$$

这里的 θ 被称这 $\mathcal{A}(\mu_0 G)$ 的角在 $\mu_0(G)$ 中的 **分配** 和 $\theta(A)$, $A \in \mathcal{A}(\mu_0 G)$, 被称为 A 在 $\mu_0(G)$ 中的 **分配值**.

引理 9.3.3 令 $\mu_0(G)$ 为图 $G=(V,E)$ 的一个 0– 嵌入. 它的面集记为 F. 则，有

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{A \in \mathcal{A}(v;\mu_0 G)} \theta(A) = \text{def}\,(v), \quad \forall v \in V; \\ \displaystyle\sum_{A \in \mathcal{A}(f;\mu_0 G)} \theta(A) = \begin{cases} \text{res}\,(f), & \text{当 } f \neq f_0; \\ \text{res}\,(f)+8, & \text{否则}, \end{cases} \\ \qquad\qquad \forall f \in F. \end{cases} \tag{9.3.7}$$

其中， f_0 为 $\mu_0(G)$ 的无限面.

证 首先，让我们记

$$\tilde{\theta} = 1 - \theta, \tag{9.3.8}$$

则有 $\forall v \in V$,

$$\sum_{A\in\mathcal{A}(v;\mu_0G)} \tilde{\theta}(A) = \begin{cases} 4, & \text{当 } \rho(v;\mu_0G) = 4; \\ 2, & \text{当 } \rho(v;\mu_0G) = 3; \\ 0, & \text{当 } \rho(v;\mu_0G) = 2. \end{cases}$$

另一方面，由 (9.3.8),

$$\sum_{A\in\mathcal{A}(v;\mu_0G)} \tilde{\theta}(A) = \rho(v;\mu_0G) - \sum_{A\in\mathcal{A}(v;\mu_0G)} \theta(A).$$

这就导出 (9.3.7) 中的第一个关系式.

进而，由引理 9.2.1, 有 $\forall f \in F - \{f_0\}$,

$$\begin{aligned} 4 &= \sum_{A\in\mathcal{A}(f);\mu_0G)} \tilde{\theta}(A) \\ &= \rho(f;\mu_0G) - \sum_{A\in\mathcal{A}(f;\mu_0G)} \theta(A). \end{aligned}$$

和当 $f = f_0$ 时，有

$$\begin{aligned} -4 &= \sum_{A\in\mathcal{A}(f_0;\mu_0G)} \tilde{\theta}(A) \\ &= \rho(f_0;\mu_0G) - \sum_{A\in\mathcal{A}(f_0;\mu_0G)} \theta(A). \end{aligned}$$

这就导出 (9.3.7) 的第二个关系式. ▯

为方便，令 $A_{v,f}$ 为 $G = (V, E)$ 的一个平面嵌入 $\mu(G)$, 其面的集合为 F, 上与 v 关联并且在 f 内的那个角.

引理 9.3.4 令 $G = (V, E)$ 是一个无显节点的正均衡性的图. $\mu(G)$ 为 G 的一个平面嵌入. 如果有一个整函数 θ:

$\mathcal{A}(\mu G)\to\{0,1,2\}$ 使得 (9.3.7) 满足，则 θ 作角的分配确定 $\mu(G)$ 的一个 0- 扩张 $\mu_0(G)$.

证 对 $\mu(G)$ 的面数用归纳法. 当 G 本身是一个圈 $C=v_1v_2\cdots v_\nu$ 时，由 (9.3.7) 中的第一个关系可知

$$\operatorname{def}(v_i)=2=\nu(A_{v_i},f_0)+\theta(A_{v_i,f_1}),$$

$i=1,2,\cdots,\nu$. 其中， f_0 和 f_1 分别为 $\mu(G)$ 的无限面和那个有限面. 这样， $\theta(A_{v_i,f_0}),\theta(A_{v_i,f_1}))$ 有三种可能值：

$$(1,1),\qquad (2,0),\qquad \text{或 } (0,2).$$

它们分别对应 $(A_{v_i,f_0},A_{v_i,f_1})$ 为 $(\pi,\pi),(3\pi/2,\pi/2)$, 或 $(\pi/2,3\pi/2)$. 由 (9.3.7) 中的第二个关系式和引理 9.2.1 可知以 θ 作一个分配确定 $\mu(G)$ 的一个 0- 扩张.

一般地，可以假设 v_0 是无限面 f_0 边界上的一个 2- 节点. 事实上，在 f_0 内，由 (9.3.7) 的第二个关系式和引理 9.2.1 可知至少有四个角为 $3\pi/2$. 这样的 v_0 总是存在的. 设 $P(v_1,v_2)$ 是 $\mu(G)$ 上的一条路. 在它上，除 v_1 和 v_2 的次不小于 3 外所有内节点的次均为 2 且 v_0 是它的一个内节点. 记 G' 为从 G 中去掉 $P(v_1,v_2)$ 的所有内节点及它们的关联边所得的图. 用 f_0' 表示 $\mu(G')$ 的无限面. 并将它视为由 $\mu(G)$ 中的无限面 f_0 和有限面 f_1 所合成的. 自然 $P(v_1,v_2)$ 在 f_0 和 f_1 的公共边界上. 容易验证，整函数 θ': $\mathcal{A}(\mu G')\to\{0,1,2\}$, 使得 $\forall A\in\mathcal{A}(\mu G')$,

$$\theta'(A)=\begin{cases}\theta(A), \text{ 若 } A\neq A_{v_i,f_0'};\\[2ex] \theta(A_{v_i,f_0})+\theta(A_{v_i,f_1})+1, \text{ 否则},\end{cases}$$

$i=1,2$, 在 $\mu(G')$ 上满足 (9.3.7). 由归纳假设， θ' 作为一个角分配确定 $\mu(G')$ 的一个 0- 嵌入 $\mu_0(G')$. 而且，由 (9.3.7) 的第二个

关系式和引理 9.2.1 即得 $\mu_0(G)$ 可延拓为 $\mu(G)$ 的一个 0- 嵌入 $\mu_0(G)$. 事实上，只要在 $\mu_0(G')$ 上适当恢复 $P(v_1,v_2)$ 的 0- 嵌入即可得 $\mu_0(G)$. ♮

定理 9.3.1 令 G 是一个正均衡性且无显节点的图. 则，它的一个平面嵌入 $\mu(G)$ 有一个 0- 扩张 $\mu_0(G)$ 当且仅当在 $\mu(G)$ 上，存在一个整函数 θ: $\mathcal{A}(\mu G)\to\{0,1,2\}$ 满足 (9.3.7).

证 从引理 9.3.3-4 直接可得. ♮

对于一个正均衡性的图 G 的平面嵌入 $\mu(G)$, 我们引进一个二部图，用 $Q_{ui}=Q_{ui}(G)=(X_Q,Y_Q;E_Q)$ 表示，按如下的方式所确定：

$$\begin{cases} X_Q=\bigcup\limits_{\substack{v\in V\\ \text{def }(v)>0}}\{v(i)|\forall i,\ 1\le i\le \text{ def }(v)\};\\ Y_Q=\bigcup\limits_{\substack{f\in F-\{f_0\}\\ \text{res }(f)>0}}\{f(i)|\forall i,\ 1\le i\le \text{res }(f)\}\\ \qquad\bigcup\{f_0(i)|\forall i,\ 1\le i\le \text{res }(f_0)+8\}\end{cases}\tag{9.3.9}$$

和

$$\begin{aligned}E_Q=\bigcup_{\substack{v\in V\\ \text{def }(v)>0}}\ \bigcup_{\substack{f\in F-\{f_0\}\\ \text{res }(f)>0\\ f\text{ ind }v}}&\{(v(i),f(j))|\forall i,j,\\ &1\le i\le \text{ def }(v),\quad 1\le j\le \text{res }(f)\}\\ \bigcup\ \bigcup_{\substack{v\in V(f_0)\\ \text{def }(v)>0}}&\{(v(i),f_0(j)|\forall i,j,\\ &1\le i\le \text{def }(v),\\ &1\le j\le \text{res }(f_0)+8\}.\end{aligned}\tag{9.3.10}$$

我们称这个二部图 Q_{ui} 为 $\mu(G)$ 的均衡图. 由均衡性 (9.3.2), 总有

$$eq = |X_Q| = |Y_Q|. \tag{9.3.11}$$

引理 9.3.5 令 $\mu(G)$ 为图 $G=(V,E)$ 的一个平面嵌入. 则, 在 $\mu(G)$ 上存在一个整函数 θ: $\mathcal{A}(\mu G) \to \{0,1,2\}$ 使得满足 (9.3.7) 当且仅当在均衡图 $Q_{ui}(\mu G)$ 上有一个完美对集.

证 必要性可由均衡性 (9.3.2) 和均衡图之定义导出. 现证充分性. 设

$$M = \{(x_i, y_i) | \ \forall i, \quad 1 \le i \le eq, \quad x_i \in X_Q, \ y_i \in Y_Q\} \tag{9.3.12}$$

为 $Q_{ui} = Q_{ui}(\mu G)$ 上的一个完美对集. 令

$$M(A_{v,f}) = \{(x_i, y_i) | \ \forall (x_i, y_i) \in M, \ 1 \le i \le eq, \quad (x_i \text{ ind } v) \wedge (y_i \text{ ind } f)\}. \tag{9.3.13}$$

其中, $A_{v,f} \in \mathcal{A}(\mu G)$, $v \in V$, $f \in F$. 由 Q_{ui} 的定义, 容易验证,

$$\forall A \in \mathcal{A}(\mu G), \qquad \theta(A) = |M(A)| \tag{9.3, 14}$$

就是 $\mu(G)$ 上的一个取值为 0,1, 或 2 且满足 (9.3.7) 的整函数.

þ

定理 9.3.2 令 $G=(V,E)$ 为一个正均衡性的图且无显节点, $\mu(G)$ 为它的一个平面嵌入. 则, $\mu(G)$ 有一个 0- 扩张 $\mu_0(G)$ 当且仅当其均衡图 Q_{ui} 有一个完美对集.

证 从定理 9.3.1 和引理 9.3.5 直接可得. þ

§9.4　特殊判准

首先，我们进一步将定理 9.3.2 所述的一般判准用于求 0 可嵌入性的禁用构形.

令 $\mu(G)$ 为一个正均衡性图 $G=(V,E)$ 的平面嵌入， F 为它的面的集合. 设 C^* 是一个上圈. 由 §4.2 中所述的 Jordan 定理， $\mu(G\backslash C^*)$ 恰有二个连通片. 分别用 $\mu_{in}^*=\mu_{in}(G;C^*)$ 和 $\mu_{out}^*=\mu_{out}(G;C^*)$ 表示. 令 V_{in}^* 和 V_{out}^* 分别为 μ_{in}^* 和 μ_{out}^* 的节点集. 若 $\tilde{V}=V_{in}^*$ (或 V_{out}^*) 满足

$$\sum_{v\in\tilde{V}}\text{def}\,(v)>\sum_{\substack{f\in F\\ f\text{ ind }v}}\text{res}_0(f)\tag{9.4.1}$$

并且没有上圈 C_1^* 有 $\mu_{in}(G;C_1^*)\subset\mu_{in}^*$(或者 μ_{out}^*) 亦满足 (9.4.1)，则称 C^* 为*节点非均衡的*. 用 Ω_{ver} 表示. 在 (9.4.1) 中，

$$\text{res}_0(f)=\begin{cases}\text{res}\,(f)+8,\text{ 若 } f=f_0;\\ \text{res}\,(f),\text{ 否则.}\end{cases}\tag{9.4.2}$$

其中， f_0 为 $\mu(G)$ 的无限面.

另一方面，令 C 为 $\mu(G)$ 上的一个圈. 由 Jordan 曲线定理，记

$$\begin{cases}\mu_{in}=\mu_{in}(G;C)=C\cup(\mu(G)\cap C_{in});\\ \mu_{out}=\mu_{out}(G;C)=C\cup(\mu(G)\cap C_{out}).\end{cases}$$

用 F_{in} 和 F_{out} 分别表示 μ_{in} 和 μ_{out} 在 F 中的面的集合. 当然， $F_{in}+F_{out}=F$. 若 $\tilde{F}=F_{in}$(或 F_{out}) 满足

$$\sum_{f\in\tilde{F}}\text{res}_0(f)>\sum_{v\in V(\mu_{in})}\text{def}\,(v)\tag{9.4.3}$$

并且没有圈 C' 使得 $\mu_{in}(G;C') \subset \mu_{in}$(或者 μ_{out}) 亦满足 (9.4.3), 则称 C 为面非均衡的, 用 Ω_{fac} 表示.

引理 9.4.1 令 $\mu(G)$ 为一个正均衡性图 $G(V,E)$ 的平面嵌入. 则, $\mu(G)$ 有一个 Ω_{ver} 当且仅当 $\mu(G)$ 有一个 Ω_{fac}.

证 设 C^* 为确定 Ω_{ver} 的上圈和 $\mu_{in}^* = \mu_{in}(G;C^*)$ 满足 (9.4.1). 由于 μ_{in}^* 和 $\mu_{out}^* = \mu_{out}(G;C^*)$ 之间的对称性, 这一假定自不失一般性. 令

$$C = \sum_{f \subset \mu_{out}^*} \partial f,$$

则由均衡性 (9.3.2), 有 $\mu_{in} = \mu(G;C_{in}) = \mu_{out}^*$, 若 $f_0 \not\subset \mu_{out}^*$; 或者 $\mu_{out} = \mu(G;C_{out}) = \mu_{out}^*$, 若 $f_0 \subset \mu_{out}^*$, 满足 (9.4.3). 而且, 若 C 不是一个 Ω_{fac} 则 μ_{in}(或 μ_{out}) 有一个圈 C' 使得 $C'_{in} \subset C_{in}$(或 $C'_{out} \subset C_{out}$) 和 $\mu'_{in} = \mu(G;C'_{in})$(或 $\mu'_{out} = \mu(G;C'_{out})$) 满足 (9.4.3). 这就导致总可找到一个 Ω_{fac}. 必要性得证. 反之, 以相仿的方式也可得充分性. ♮

引理 9.4.2 构形 Ω_{ver} 和 Ω_{fac} 对于 0- 可扩张性均为禁用的.

证 由引理 9.4.1, 只要对 Ω_{ver} 和 Ω_{fac} 中之任何一个证明此引理即足. 若在平面嵌入 $\mu(G)$ 中有 Ω_{ver}, 则由定理 1.3.8 可知均衡图 Q_{ui} 不可能有完美对集. 又, 由定理 9.3.2 可知 $\mu(G)$ 不是 0- 可扩张的. 因此, 由 Ω_{ver} 的极小性可知 Ω_{ver} 是一个禁用构形. ♮

定理 9.4.1 一个节点次不大于 4 的无三角形的可平面图 $G = (V,E)$ 是 0- 可嵌入的当且仅当在它的一个平面嵌入 $\mu(G)$ 中不存在 Ω_{ver} (或 Ω_{fac}).

证 必要性由引理 9.4.2 直接得到. 现证充分性. 因为在一个平面嵌入 $\mu(G)$ 中无 Ω_{ver}, 则对任何 $B \subset V$,

$$\sum_{v \in B} \text{def}\,(v) \le \sum_{\substack{f \text{ ind } v \\ v \in B}} \text{res}_0(f). \tag{9.4.4}$$

否则, 若存在 $B \subset V$ 使得不满足 (9.4.4), 则在均衡图 $Q_{ui}(\mu G)$ 中由 $X(B)$ 和 $Y(B)$ 的节点导出的子图必有一个连通片, 记为 $H = (X_0, Y_0; E_0)$, $X_0 \subset X(B)$, $Y_0 \in Y(B)$, 使得

$$\sum_{v \text{ ind } V(X_0)} \text{def}\,(v) = |X_0| > |Y_0| = \sum_{f \in F(Y_0)} \text{res}_0(f). \tag{9.4.5}$$

其中, $X(B)$ 和 $Y(B)$ 分别为在 X_Q 和 Y_Q 中相应 B 中的节点和与 B 关联的面的那些均衡图的节点的集合. $V(X_0)$ 和 $F(Y_0)$ 分别为在 $\mu(G)$ 中那些相应 X_0 和 Y_0 中的节点和面的集合. 这就导致在 G 中存在一个上圈 C^* 使得 μ^*_{in} 或 μ^*_{out} 为 B 在 G 中导出子图的一个平面嵌入而且满足 (9.4.1). 与 $\mu(G)$ 中无 Ω_{ver} 矛盾. 从而, 由定理 1.3.8 可知 $Q_{ui}(\mu G)$ 有一个完美对集. 进而, 再由定理 9.3.2 即得充分性. ♮

根据上面得到的那些结果, 我们可以发现一大批正均衡性的图不是 0- 可嵌入的. 下面列几类这样的图.

推论 9.4.1 设一个正均衡性图 $G = (V, E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$ 中没有一个面是 0- 许可的. 即对任何面 f, 均有

$$n_{2-val}(f) < n_{4-val}(f) + 4. \tag{9.4.6}$$

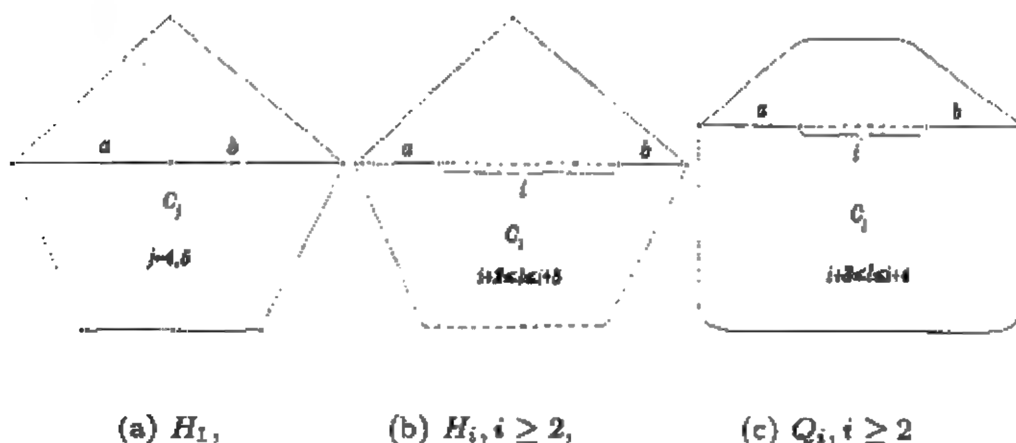
则, $\mu(G)$ 不是 0- 可扩张的. 而且, 若 G 与一个 3- 连通的图同胚, 则 (9.4.6) 将使 G 不是 0- 可嵌入的.

证 定理 9.2.1 的一个直接结果. ♮

推论 9.4.2 任何无三角形且在每一个圈上至多有 3 个 2- 节点的图不是 0- 可嵌入的.

证 推论 9.4.1 的一个直接结果. ♮

推论 9.4.3 在无三角形的图 $G=(V,E)$ 的一个平面嵌入 $\mu(G)$ 中，若有 $H_i, i\geq 1$, 或 $Q_i, i\geq 2$, 如图 9.4.1 所示，则 G 不是 0- 可嵌入的.



(a) H_1, (b) $H_i, i\geq 2$, (c) $Q_i, i\geq 2$

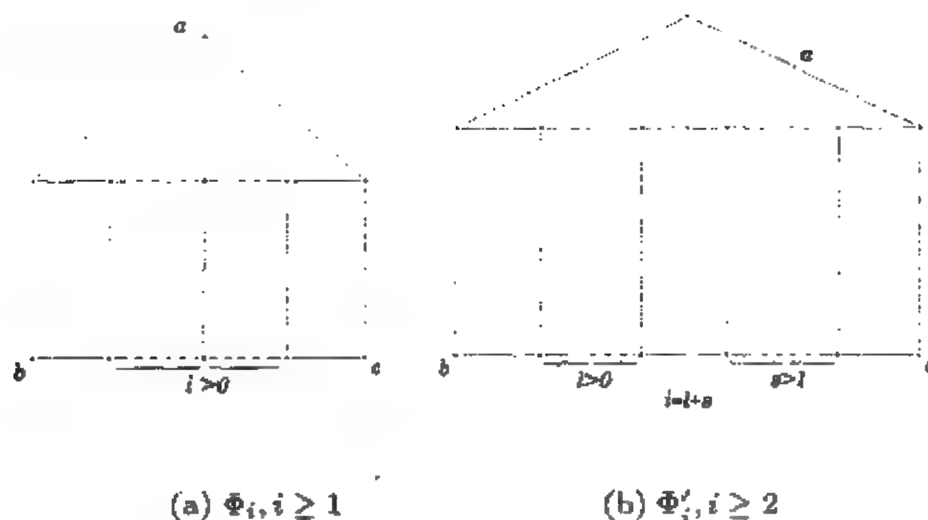
图 9.4.1

证 因为 $H_i, i\geq 1$, 有 Ω_{ver}. 事实上，如图 9.4.1 中在每个图边对 $\{a,b\}$ 均为 Ω_{ver} 中之那个上圈 C^*. 由定理 9.4.1 即得.

♮

推论 9.4.4 在无三角形的图 $G=(V,E)$ 的一个平面嵌入中，若存在 $\Phi_i, i\geq 1$, 和 $\Phi_i', i\geq 2$, 如图 9.4.2 所示之一个构形，则 G 不是 0- 可嵌入的.

证 因为在 $\Phi_i, i\geq 1$ 和 $\Phi_i', i\geq 2$ 中，如图所示每个构形都仅有 3 个 2- 节点. 由推论 9.4.3 可知全不是 0- 可嵌入的. 从而， G 也必不是 0- 可嵌入的. 即得欲证. ♮



(a) $\Phi_i, i \geq 1$　　(b) $\Phi_i', i \geq 2$

图 9.4.2

推论 9.4.5 令 $G=(V,E)$ 是一个正均衡性的图. 若在它的每个平面嵌入 $\mu(G)$ 中均有一个面 f 使得

$$n_{4-val}(f) > n_{2-val}(f) + 4, \tag{9.4.7}$$

则 G 不是 0- 可嵌入的.

证 由于易知 f 的边界圈本身形成了一个 Ω_{fac}, 由定理 9.4.1 即得. ▯

进而, 我们再研究二类可平面图并且对它们的 0- 可嵌入性发现了非常简单的表征. 这就是外可平面图与 Halin 图.

引理 9.4.3 任何无三角形的外可平面图均有二条相互独立的边它们的端点全是 2- 节点.

证 首先, 易看出任何外平面图均至少有两个 2- 节点不相邻且在两个不同的有限面的非公共 (若相邻) 边界上. 然后, 还知若一个 2- 节点不与其它 2- 节点相邻, 则由外平面性它必落在一个三角形上. 从而, 这二个 2- 节点均与另外的 2- 节点相邻. 又, 它们在二个不同面的 (非公共的, 若相邻) 边界上,

故只能引理成立. ▮

定理 9.4.2 一个无 4- 节点的外可平面图 $G=(V,E)$ 是 0- 可嵌入的，当且仅当它不含有三角形.

证 因为必要性显然，只证充分性. 对 G 的度用归纳法. 当 G 的边很少或者 G 本身就是一个圈时，易验证.

一般地，因为 G 无三角形，由引理 9.4.3 可以假设 (u,v) 是一条边且 u 和 v 全是 2- 节点令 L 为包括边 (u,v) 所有节点都是 G 中的 2- 次节点组成的最长路. 记 u_0 和 v_0 为与 L 二端点相邻但不在 L 中的节点. 可设 (u_0,v_0) 为 G 的一条边. 否则，可在 G 上添上边 (u_0,v_0) 得 G'. 令 $G_1=G-L$ 或者 $G_1=G'-L$，当 $(u_0,v_0)\notin E$. 由于 G_1 仍然是无 4- 节点的外平面图，当然，也不会有三角形. 由归纳假设，G_1 是 0- 可嵌入的. 由外平面性，u_0 和 v_0 仍在无限面边界上. 不管怎样，总可以从 G_1 的一个 0- 嵌入经过恢复 L 而得到 G 的一个 0- 嵌入. 从而，充分性得证. ▮

如 §2.1 中所提到的，一个 Halin 图是由一个树和一个外边界圈构成的. 这里，假设在树上没有 2- 节点. 事实上，这种假定对于这里的目的是非本质的.

为简便，对任何图 $G=(V,E)$ 的一个平面嵌入 $\mu(G)$，我们记

$$\mathrm{dif}\,(S)=\sum_{\substack{f\ \mathrm{ind}\ S\\ f\in F}}\mathrm{res}_0(f)-\sum_{v\in S}\mathrm{def}\,(v). \tag{9.4.8}$$

其中，$S\subseteq V$.

引理 9.4.4 任何一个无三角形的 Halin 图而且所有内节点的次均大于 2. 必至少有二个 2- 节点在外边界圈上.

证 令 L 是给定的 Halin 图 G 中那个树上的最长路. 记

u 和 v 为 L 的二个端点. 由最长性, 它们必全在外边界圈上. 若 u_1 和 v_1 分别为在 L 上的与 u 和 v 相邻的节点, 则由 L 的最长性和 u_1 与 v_1 的次大于 2, 考虑到无三角形, u_1 与 v_1 均必至少有一个关联面在外边界圈上的公共边界至少含二条边. 从而, 在外边界圈上至少有二个 2- 节点. 引理得证. ♮

定理 9.4.3 令 $G=(V,E)$ 是一个无三角形的 Halin 图且它的所有内节点全是 3- 节点. 则 G 是 0- 可嵌入的, 当且仅当在外边界圈上至少有四个 2- 节点.

证 因为由推论 9.4.2 即得必要性, 只证充分性. 由定理 9.4.1, 只要论证 G 不含 Ω_{ver} 即足. 用反证法. 设 C^* 是一个节点非均衡的上圈, 则有两种可能的情形发生: $\mu^*_{in}=\mu_{in}(G;C^*)$ 有一个节点在外边界圈 $B=\partial f_0$ 上或否. 为方便, 令 F^*_{in} 为 G 中所有那些与 μ_{in} 的节点关联的面的集合.

情形 1 $V^*_{in}\cap V(B)=\emptyset$, 其中 $V^*_{in}=V(\mu^*_{in})$. 由于 μ^*_{in} 是树, 有

$$|F^*_{in}|=|E(C^*)|. \tag{9.4.9}$$

而且, 因为 V^*_{in} 中所有节点皆 G 中的 3- 节点, 有

$$|F^*_{in}|=|V^*_{in}|+2. \tag{9.4.10}$$

由于只 (或否) 与 μ^*_{in} 的显节点关联的面的次至少比它的与 μ^*_{in} 或 C^* 关联的边界边的数目多 2(或 1), 和若 μ^*_{in} 中显节点的数目 $\nu_1(\mu^*_{in})$ 少于 4 而且它们每个与一个四边形关联则至少 $4-\nu_1(\mu^*_{in})$ 个其它面, 其每个的次至少比与 μ^*_{in} 或 C^* 关联的那些

面之数目大 2, 有

$$\sum_{f\in F_{in}^*}\rho(f;G)\geq 2(\varepsilon(\mu_{in}^*)+|V_{in}^*|+2)$$

$$+|V_{in}^*|+2+\max\{4,\nu_1(\mu_{in}^*)\}$$

$$\geq |V_{in}^*|+4(|F_{in}^*|-1)+4$$

$$= V_{in}^*|+4|F_{in}^*. \tag{9.4.11}$$

其中, 用到 (9.4.9-10) 和 $\varepsilon(\mu_{in}^*)=|V_{in}^*|-1$. 另一方面, 由 G 的内节点的 3- 正则性, 有

$$\sum_{v\in V_{in}^*}\text{def }(v)=|V_{in}^*|. \tag{9.4.12}$$

这样, 由 (9.4.11-12) 可知 $\text{dif}(V_{in}^*)\geq 0$. 与 C^* 的节点非均衡性矛盾.

情形 2 $V_{in}^*\cap V(B)\neq\emptyset$. 令 $V_0=V_{in}^*\cap V(B)$ 和 $V_1=V_{in}^*\backslash V_0$. 由情形 1 中所讨论的, 可知

$$\text{dif }(V_{in}^*)=\text{dif }(V_1)+\text{res}_0(f_0)$$

$$-\sum_{v\in V(B)}\text{def }(v). \tag{9.4.13}$$

根据 (9.4.11-12), 有

$$\text{dif }(V_1)\geq\max\{0,\nu_2(f_0,\mu_{in}^*)-4\}. \tag{9.4.14}$$

其中, $\nu_2(f_0;\mu_{in}^*)$ 为 $V(B)$ 中 G 的相应 $\mu_{in}^*[V_1]$ 中显节点的 2-节点数. 而且, 令

$$\Delta=\text{res}_0(f_0)-\sum_{v\in V(B)}\text{def }(v),$$

则有

$$\Delta \geq |V(f_0)| + 4 - (|V_0| + \nu_2(f_0; \mu_{in}^*)). \tag{9.4.15}$$

考虑到 (9.4.13-15), 即可得

$$\text{dif } (V_{in}^*) \geq |V(f_0)| - |V_0| = 0.$$

又与 C^* 的节点非均衡性矛盾. ♮

§9.5 注记

9.5.1 很多算法，其中多数在计算复杂性方面是线性的，可以被设计用来识别一个与 3- 连通的图同胚的图或它的平面嵌入是否 0- 可扩张的， 0- 可嵌入的甚至 0- 可实现的，以便进一步在计算机上实现. 除了 [Liu 26] 之结果外，关于凸性的问题也完满地得到了解决. 然而，一般图的 0- 可嵌入性之判别就算法复杂性而言绝非容易 [Liu27].

9.5.2 这里所讨论的问题可以引伸到高维的情形. 也许会有人还想看一看在曲面上的情形. 不过，这时似不再能化为整数格上的问题.

9.5.3 关于网格可嵌入性，在 [Liu 26] 中可以看到一些基础性的讨论. 但，那里只提供了一些部分结果. 本章将 [Liu 26] 中提出的任务得以完成.

9.5.4 事实上，网格可扩张性的问题与如下的 Diophantine 方程 (或者说不定方程) 等价：对于图 $G = (V, E)$ 的一个平面嵌入 $\mu(G)$, F 为其面的集合，求 $x_A \in \{-1, 0, 1\}$, $A \in \mathcal{A}(\mu G)$

使得

$$\begin{cases} \forall v \in V, & \displaystyle\sum_{A\in \mathcal{A}(v;\mu G)} x_A = \begin{cases} 4, & 若\ \rho(v;G)=4; \\ 2, & 若\ \rho(v;G)=3; \\ 0, & 否则; \end{cases} \\ \forall f \in F, & \displaystyle\sum_{A\in \mathcal{A}(f;\mu G)} x_A = \begin{cases} -4, & 若\ f=f_0; \\ 4, & 否则. \end{cases} \end{cases} \quad (9.5.1)$$

虽然，X_A, $A \in \mathcal{A}(\mu G)$, 的取法的可能性是 G 的阶或度的指数型函数，事实上，从 §9.4-5 中所讨论的表明方程 (9.5.1) 是多项式地可解的.

第十章

多面形的同构

§10.1 多面形的自同构

令 $\Sigma = \Sigma(V, E, F)$ 是一个多面形. 其中, $G = (V, E)$ 为它的基准图和 F 为它的面集. 对于 $e = (u, v) \in E$, 记

$$X(e; \Sigma) = \{e_{u,r}, e_{u,l}, e_{v,r}, e_{v,l}\}. \tag{10.1.1}$$

并称之为 e 的 **四元胞腔**. 其中, $e_{u,r}$, $e_{u,l}$ 和 $e_{v,r}$, $e_{v,l}$ 分别表示 e 的从 u 和 v 发出的右, 左侧的半边. 令

$$\mathcal{X}(\Sigma) = \bigcup_{e \in E} X(e; \Sigma). \tag{10.1.2}$$

并称之为 Σ 的 **通集**. 进而, 对于 $v \in V$, 设 $\varrho(v) = (a, b, c, \cdots)$ 为 Σ 上在节点 v 处的旋. 记

$$\begin{cases} \varrho_r(v) = (a_{v,r}, b_{v,r}, c_{v,r}, \cdots); \\ \varrho_l(v) = (\cdots, c_{v,l}, b_{v,l}, a_{v,l}). \end{cases} \tag{10.1.3}$$

分别称为 Σ 上 v 处的右; 左旋. 则我们可以伴随 Σ 得到一个

$\mathcal{X}(\Sigma)$ 上的置换 $\pi(\Sigma)$ 为

$$\pi(\Sigma) = \prod_{v \in V} \varrho_r(v)\varrho_l(v), \tag{10.1.4}$$

并称之为一个 Σ–置换. 这里，需特别指出的是 $\varrho_r(v)$ 的走向与 $\varrho_l(v)$ 的走向为互相反的. 有时，我们用 $e_{0,r}, e_{0,l}$ 和 $e_{1,r}, e_{1,l}$ 而不是 $e_{u,r}, e_{u,l}$ 和 $e_{v,r}$, $e_{v,l}$. 这时，通常将边 $e = (u, v) \in E$ 视为有向边. 用 0 和 1 分别表示它的尾和首.

进而，为方便，我们引进两种运算 α 和 β. 它们实际上是 $\mathcal{X}(\Sigma)$ 上的两类特殊的置换. 这就是对任何 $x \in \mathcal{X}(\Sigma)$, αx(或者 x^{α}) $= \alpha(x)$ 表示与 x 同关联一个节点但在 x 的另一侧和 βx(或者 x^{β})$= \beta(x)$ 为关联的一个节点与 x 不同但与 x 在相同的侧. 因为对任何 $e \in E$, 有

$$\begin{cases} \alpha(e_{0,r}) = e_{0,l}, \quad \alpha(e_{0,l}) = e_{0,r}; \\ \beta(e_{0,r}) = e_{1,r}, \quad \beta(e_{0,l}) = e_{1,l} \end{cases} \tag{10.1.5}$$

和

$$\begin{cases} \alpha\beta(e_{0,r}) = \beta\alpha(e_{0,r}), \quad \alpha\beta(e_{0,l}) = \beta\alpha(e_{0,l}); \\ \alpha\beta(e_{l,r}) = \beta\alpha(e_{1,r}), \quad \alpha\beta(e_{1,l}) = \beta\alpha(e_{1,l}). \end{cases} \tag{10.1.6}$$

换言之，对任何 $x \in \mathcal{X}(\Sigma)$,

$$\begin{cases} \alpha^2(x) = \alpha(\alpha(x)) = \beta^2(x) = x; \\ \alpha\beta(x) = \beta\alpha(x). \end{cases} \tag{10.1.7}$$

引理 10.1.1 令 $\Sigma_1 = \Sigma(V_1, E_1, F_1)$ 和 $\Sigma_2 = \Sigma(V_2, E_2, F_2)$ 为二个多面形，$\tau : E_1 \to E_2$ 为一个双射. 则，τ 是 Σ_1 和 Σ_2 之

间的一个同构当且仅当 τ 导出一个双射，仍记为 τ: $\mathcal{X}(\Sigma_1) \to \mathcal{X}(\Sigma_2)$ 使得如下形式：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}(\Sigma_1) & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{X}(\Sigma_2) \\ \gamma_1 \downarrow & & \downarrow \gamma_2 \\ \mathcal{X}(\Sigma_1) & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{X}(\Sigma_2) \end{array} \tag{10.1.8}$$

对于 $(\gamma_1, \gamma_2) = (\alpha, \alpha)$, (β, β) 和 (π_1, π_2) 全是可交换的. 其中，$\pi_i = \pi(\Sigma_i)$, $i = 1, 2$.

证　由 τ 是 Σ_1 和 Σ_2 之间的一个同构，对于 $f = (a_f, b_f, c_f, \cdots) \in F_1$ 有

$$\tau(f) = (\tau(a_f), \tau(b_f), \tau(c_f), \cdots), \tag{10.1.9}$$

而且由 §1.5 中所讨论的，对于 $v \in V$, $\varrho(v) = (a_v, b_v, c_v, \cdots)$, 有

$$\tau(\varrho(v)) = (\tau(a_v), \tau(b_v), \tau(c_v), \cdots). \tag{10.1.10}$$

我们可以按以下的方式从双射 τ: $E_1 \to E_2$ 导出双射 τ: $\mathcal{X}(\Sigma_1) \to \mathcal{X}(\Sigma_2)$.

首先，取一个节点 $O \in V_1$ 作为始点. 设 $\varrho(O) = (a_o, b_o, c_o, \cdots)$. 则 $\tau(\varrho(O)) = (\tau(a_0), \tau(b_0), \tau(c_0), \cdots)$. 令 $x(a_o) \in \mathcal{X}(\Sigma_1)$ 为 $a_{o,r}$ 和 $a_{o,l}$ 中之一. 定义

$$\tau(x(a_0)) = \begin{cases} x(\tau(a_0)), \text{ 若 } \varrho(O) \text{ 与 } \tau(\varrho(O)) \text{ 同向}; \\ \alpha(x)(\tau(a_0)), \text{ 否则}. \end{cases} \tag{10.1.11}$$

然后，用如下的规则将之延拓到整个 $\mathcal{X}(\Sigma_1)$: 若对于 $x \in \mathcal{X}(\Sigma_1)$,

$\tau(x)$ 已被确定，则定义

$$\begin{cases} \tau(\alpha x) = \alpha\tau(x); \\ \tau(\beta x) = \beta\tau(x); \\ \tau(\pi_1 x) = \pi_1\tau(x). \end{cases} \tag{10.1.12}$$

由 $G_1 = (V_1, E_1)$ 的连通性，这个导出的双射 τ 从 α, β 和 π_1 的可延性可知在 $\mathcal{X}(\Sigma_1)$ 上是适定的. 而且，由 (10.1.12) 可知 (10.1.8) 所示之形式皆可交换的. 这就得到了必要性.

反之，由 τ: $\mathcal{X}(\Sigma_1) \to \mathcal{X}(\Sigma_2)$，我们可导出 τ: $E_1 \to E_2$ 遵从这样的规则：对于 $e \in E_1$，$\tau(e) \in E_2$ 相应四元胞腔

$$\{x(\tau(e)), \quad \alpha x(\tau(e)), \quad \beta x(\tau(e)), \quad \alpha\beta x(\tau(e))\}.$$

由形式 (10.1.8)，对于 $(\gamma_1, \gamma_2) = (\alpha, \alpha)$ 和 (β, β)，它是适定的. 当然 τ: $E_1 \to E_2$ 和 τ: $\mathcal{X}(\Sigma_1) \to \mathcal{X}(\Sigma_2)$ 一样是一个双射. 进而，在每一个节点 v 处在 Σ_1 上的旋由 $\pi(\Sigma_1)$ 上的那个右循环所确定. 由 (10.1.8) 中 $(\gamma_1, \gamma_2) = (\pi_1, \pi_2)$ 的情形，对于 $v \in V_1$，$\varrho(v) = (a_v, b_v, c_v, \cdots)$，有 (10.1.10). 同样，由 §1.5 中所讨论的，对于 $f = (a_f, b_f, c_f, \cdots) \in F_1$ 有 (10.1.9). 从而，τ 是 Σ_1 和 Σ_2 之间的一个同构. 这就得到了充分性. ♮

引理 10.1.2 令 $\Sigma = \Sigma(V, E, F)$ 是一个多面形. 给定 $x, y \in \mathcal{X}(\Sigma)$. 假设 τ_1 和 τ_2 是 $\mathcal{X}(\Sigma)$ 上的两个双射，并且它们确定了 Σ 上的二个自同构. 如果 $\tau_1(x) = \tau_2(x) = y$，则 $\tau_1 = \tau_2$.

证 因为 $\tau_1(x) = \tau_2(x) = y$，由引理 10.1.1 知

$$\begin{cases} \tau_1(\alpha x) = \alpha y = \tau_2(\alpha x); \\ \tau_1(\beta x) = \beta y = \tau_2(\beta x) \end{cases} \tag{10.1.13}$$

和由 (10.1.5),

$$\tau_1(\pi x) = \pi y = \tau_2(\pi x). \tag{10.1.14}$$

进而，因为 Σ 的基准图 $G_1 = (V, E)$ 是连通的，对任何 $z \in \mathcal{X}(\Sigma)$ $(t \neq y)$ 有一条由与 y 关联的边到与 z 关联的边的路. 由此，存在一个正整数 $k > 0$, r_i, s_i, t_i $i \geq 0$, $i = 1, 2, \cdots, k$, 使得

$$z = \prod_{1 \leq i \leq k} \alpha^{r_i} \beta^{s_i} \pi^{t_i}(y). \tag{10.1.15}$$

由 (10.1.13) 和 (10.1.14) 可知：对任何 $z \in \mathcal{X}(\Sigma)$,

$$\tau_1(\tilde{x}) = z = \tau_2(\tilde{x}).$$

其中,

$$\tilde{x} = \prod_{1 \leq i \leq k} \alpha^{r_i} \beta^{s_i} \pi^{t_i}(x).$$

所以，$\tau_1 = \tau_2$. 即得引理. ♮

推论 10.1.1　若 τ 是 $\mathcal{X}(\Sigma)$ 到它自身的一个双射并且导出 Σ 上的一个自同构使得有一个 $x \in \mathcal{X}(\Sigma)$, $\tau(x) = x$, 则 $\tau = 1$, 即全同自同构. ♮

定理 10.1.1　令 Aut (Σ) 为多面形 $\Sigma = \Sigma(V, E, F)$ 的自同构群，aut $(\Sigma) = |\text{Aut}(\Sigma)|$, 即群 Aut$(\Sigma)$ 的阶，和 $\varepsilon(\Sigma) = |E|$. 则，有

$$\text{aut}(\Sigma) | 4\varepsilon(\Sigma). \tag{10.1.16}$$

证　首先，将 $\mathcal{X}(\Sigma)$ 中的元素按等价 $\sim_{\text{Aut}}$ 分类：$\forall x, y \in \mathcal{X}(\Sigma)$,

$$x \sim_{\text{Aut}} y \Longleftrightarrow \exists \tau \in \text{Aut}(\Sigma), x = \tau y. \tag{10.1.17}$$

设在这个等价之下，有

$$\mathcal{X}(\Sigma) = \sum_{i=1}^{s} X(x_i). \tag{10.1.18}$$

其中， $x_i \in X(x_j)$. 当且仅当 $i = j$, 然后，我们证

$$|X(x_i)| = \text{aut}(\Sigma), \quad 1 \le i \le s. \tag{10.1.19}$$

事实上，对任何 $\tau_1, \tau_2 \in$ Aut(Σ), 若 $\tau_1 x_i = \tau_2 x_i$, 则 $\tau_2^{-1}\tau x_i = x_i$. 因为 $\tau_2^{-1}\tau_1 \in$ Aut(Σ), 由推论 10.1.1 可知 $\tau_1 = \tau_2$. 这就是说 (10.1.9) 成立. 而且，由 (10.1.1-2) 知 $|\mathcal{X}(\Sigma)| = 4\varepsilon(\Sigma)$. 从 (10.1.19) 即得定理. ▯

推论 10.1.2 对于任何多面形 Σ, 总有 aut $(\Sigma) \le 4\varepsilon(\Sigma)$. 对于平面上的多面形 Σ, 其等式成立当且仅当 Σ 是 C_n, C_n^* 和 Plato 多面体中之一. 其中， C_n 为长度为 n 的圈， C^* 由 n 条重边组成的上圈.

证 第一个结论由定理 10.1.1 直接导出. 由与定理 4.1.1 相仿的讨论即可得第二个结论. 其理由是等式成立当且仅当 Σ 是全正则多面形. ▯

同样地，如 §4.1 中所讨论的，我们也可容易地得到在射影平面，环面，以及 Klein 瓶上自同构群的阶为 $4\varepsilon(\Sigma)$ 的多面形 Σ.

推论 10.1.3 对于 3- 连通的可平面图 $G = (V, E)$, 有

$$\text{aut}(G) \le 4\varepsilon(G). \tag{10.1.20}$$

其中， aut (G) 为 G 上的自同构群 Aut (G) 的阶和 $\varepsilon(G)$ 为图 G 的度.

证 由定理 4.3.3 可知 Aut(G) =Aut(μG), 其中 $\mu(G)$ 为 G 的平面嵌入. 由推论 10.1.2 即得. ∎

然而, 对于图 $G=(V,E)$, 一般而论, 允许 aut $(G)>4\varepsilon(\Sigma)$. 即便对可平面图这一不等式也是允许的. 当然这时它绝不会是 3- 连通的.

定理 10.1.2 令 ν_i 和 φ_i 分别为多面形 Σ 中次为 $i, i\geq 1$, 的节点和面的数目. 则, 有

$$\mathrm{aut}(\Sigma)|(2i\nu_i, 2j\varphi_j|\forall i, i\geq 1, \forall j, j\geq 1). \tag{10.1.21}$$

其中, $(2i\nu_i, 2j\varphi_j|\forall i, j\geq 1)$ 为括号中所有数的最大公约数.

证 由 (10.1.8), 在 Σ 上的一个自同构 τ 必需有这样的性质. 对 $x\in\mathcal{X}(\Sigma)$ 与一个次为 $i(i\geq 1)$ 的节点和一个次为 $j(j\geq 1)$ 的面关联, $\tau(x)$ 也必与一个次为 i 的节点和一个次为 j 的面关联. 我们也可以用规则 (10.1.7) 对于 $\mathcal{X}(\Sigma)$ 中与次为 i 的一个节点关联的元素分类. 然后, 亦可见所有这些类均有同样的基数, 即自同构群 Aut (Σ) 的阶 aut(Σ). 因为在 $\mathcal{X}(\Sigma)$ 中与一个次为 i 的节点关联的元素数为 $2i\nu_i$. 故, aut$(\Sigma)|2i\nu_i$. 相仿地, 亦可得 aut$(\Sigma)|2j\varphi_j$. 由 $i, i\geq 1$, $j, j\geq 1$, 的任意性, 即得 (10.1.21). ∎

依据定理证明中之想法, 我们还可进一步考查 $\mathcal{X}(\Sigma)$ 中的那些既与一个次为 $i, i\geq 1$, 的节点又与一个次为 $j, j\geq 1$, 的面关联的元素等以改进 (10.1.21). 这些只好留给读者.

推论 10.1.4 对任何一个多面形 Σ, 均有

$$\mathrm{aut}(\Sigma)\leq(2i\nu_i, 2j\varphi_j|\forall i, j\geq 1). \tag{10.1.22}$$

证 定理 10.1.2 的直接结果. ♮

推论 10.1.5 对任一 3- 连通可平面图 $G=(V,E)$, 均有

$$\mathrm{aut}(G) \leq (2i\nu_i, 2j\varphi_j | \forall i,j \geq 1). \tag{10.1.23}$$

证 与推论 10.1.3 的证明相仿. ♮

§10.2 Euler 和非 Euler 码

在这一节, 我们讨论用一个 ν 进制的 $2\varepsilon+1$ 位数表示一个多面形, 其中, $\nu=\nu(\Sigma)=|V|$, $\varepsilon=\varepsilon(\Sigma)=|E|$, 和 $\Sigma=\Sigma(V,E,F)$ 为多面形.

对于一个给定的多面形 Σ, 有各种方法产生 ν 进制的 $2\varepsilon+1$ 位数以表示它. 其要旨在于对 Σ 的基准图 $G=(V,E)$ 上的确向树给以定向. 这里, 仅提供两种定向方式.

在确向树上, 第一类定向方法是尽量按照面边界上所确定的循环次序.

一个节点, 根据尚未访到或已经访过分别称为处于 新的 或 旧的 状态. 分别用 N 和 $\bar{N}$ 表示. 一条边被安排有三个状态: O, I 和 II. 它们分别表示这条尚未 (0 次) 访, 访一次和访二次. 访二次也称为 用完 的. 当然, 我们总是为简便而假设多面形 Σ 的基准图是简单的, 即无环和无重边. 然而, 下面的所有结果均易于引伸到更一般的情形.

FOD– 过程: 令 $\Sigma=\Sigma(V,E,F)$ 用 $\mathcal{X}(\Sigma)$ 上的一个置换如 (10.1.4) 所表示. 对于 $v\in V$, $e\in E$, 记 $S(v,e)=(S(v),S(e))$ 为节点 v 和边 e 所处的状态. 令 $\Lambda=\{0,1,\cdots,\nu-1\}$.

始规则 选一个始节点 v 达 $x(e)$. v 与 $\mathcal{X}(\Sigma)$ 中的一个元素 $x(e)$ 关联, $e \in E$, 令 $S(v,e) = (N,O)$.

F– 规则 1 若到节点 v 达 $x(e) \in \mathcal{X}(\Sigma)$ 并伴随 $S(v,e) = (N,O)$, 在 v 处记录 A 中尚未记录过的最小数并令 $S(v,e) = (\bar{N},I)$. 旅行边 $e = (v,u)$ 从 v 经 $x(e)$ 到 u. 当 $S(u) \neq \bar{N}$ 时, 达 $x(e_1) = \pi\alpha\beta x(e)$ 并令 $S(u,e_1) = (N,O)$ 和 $S(e) = I$; 否则, 达 $\alpha\beta x(e)$ 并令 $S(e) = I$.

F– 规则 2 若到节点 v 达 $x(e) \in \mathcal{X}(\Sigma)$ 并伴随 $S(v,e) = (\bar{N},I)$. 记录在 v 处已被记录过的数并令 $S(e) = II$. 旅行边 $e = (v,u)$ 从 v 经 $x(e)$ 到 u 达 $x(e_1) = \pi^i\alpha\beta x(e)$, 其中 i 是使得与 $\pi^j\alpha\beta x(e)$ 关联之边尚未用完为最小者. 并令

$$S(e_1) = \begin{cases} O, & \text{当 } e_1 \text{ 尚未状态;} \\ II, & \text{否则.} \end{cases}$$

终规则 若所有边皆处状态 II 并在节点 v 处记录 0, v 就是此过程之始节点.

定理 10.2.1 对于节点 v 和 $x(e) \in \mathcal{X}(\Sigma)$ 与 v 关联的选定, FOD– 过程是适定的而且依次所记录下来的是一个首位和末位均为 0 的一个 $2\varepsilon + 1$ 位的 ν 进制数.

证 因为 FOD– 过程的执行是沿 Σ 上由面的循环次序所确定的确向树的定向, 由 §2.2 中所讨论的, 定理中的第一个结论得证. 进而, 由 FOD– 过程所得到的恰为 Σ 的基准图的每一边作为二重边的图上的一个 Euler 回. 因为从一个节点沿一边到每一个节点的每一步就在一个节点处记录一次而且最后一

次在始节点处，其数为 0. 沿着 Euler 回所记录下来的数字实际上形成一个 $2\varepsilon+1$ 位数. 又，每个数字至多为 $\nu-1$, 即它本身为一个 ν 进制数. 这就得到了第二个结论. □

用 FOD- 过程所得到的那个 $2\varepsilon+1$ 位的 ν 进制数记为 $X = X(\Sigma) = x_1, x_2 \cdots x_{2\varepsilon+1}$, 并称它为 Σ 的一个 F-码.

第一，由 FOD- 过程可以看出，若将 X 看作一个序列，并依从左向右的次序把第一次出现的数字记下来，则所得的即自然数之序列 $0, 1, 2, \cdots, \nu-1$. 具有这种性质的 ν 进制数被称为*良次序的*.

第二，因为在 FOD- 过程中每一边旅行恰两次，在 X 中 2ε 个相继数对可以划分为二个部分： X_1 和 X_2, $|X_1| = |X_2| = \varepsilon$. 在 X_1 和 X_2 之间有一个双射使得相应的对如不是相同则必只是次序不同. 一个具有这种性质的 ν 进制数被称为*良多面形的*.

第三，由 FOD- 过程中的 F- 规则 1, 在 X 中的每个相继对 $x_i x_{i+1}$, 其中 x_{i+1} 不是第一次出现的而且相应的相继对在遇到 $x_{i+2} = x_i (x_{i+2} \neq x_i)$ 之前从不出现 (出现), $2 \leq i \leq 2\varepsilon$. 这就是说在 x_i 处有一个反射. 当然， $x_{i+1} < x_i$. 进而，令 $f_1 = x_1, x_2, \cdots, x_{i_1}$ 使得 $x_{i_1} = x_1$ 和所有 x_i, $1 \leq i \leq i_1 - 1$, 皆非反射的，由 F- 规则 1, $x_i = i-1$, $1 \leq i \leq i_1 - 1$. 若 $f_1, f_2, \cdots, f_h$ 已经发现，则令

$$X\langle f_1, f_2, \cdots, f_k\rangle = x_1^{(k)} x_2^{(k)} \cdots, \tag{10.2.1}$$

为在 X 所确定的次序下，由所有未在 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 中出现的相继对组成的. 并且，令

$$f_{k+1} = \prod_{i=0}^{l} X^{(k)}(t_i, s_{i+1}) \tag{10.2.2}$$

其中

$$X^{(k)}(t_i, s_{i+1}) = x_{t_i}^{(k)} x_{t_i+1}^{(k)} \cdots x_{s_{i+1}}^{(k)}, \quad t_0 = 1, \tag{10.2.3}$$

所有 $x_{t_i+1}^{(k)}, x_{t_i+2}^{(k)}, \cdots, x_{s_{i+1}-1}^{(k)}$ 均非反射的，$0 \le i \le l$, $x_{s_i}^{(k)} = x_{t_i}^{(k)}$, $1 \le i \le l$, $x_{s_{l+1}}^{(k)} = x_{t_0}^{(k)}$, 和 (10.2.2) 所示运算之进行按照 $X\langle f_1, \cdots, f_k \rangle$ 中的次序. 容易检验，一个多面形的 F– 码具有这样的性质：存在一个正整数 φ 使得 $f_1, f_2, \cdots, f_\varphi$ 满足 $X\langle f_1, f_2, \cdots, f_\varphi \rangle = \emptyset$. 一个 $2\varepsilon + 1$ 位的 ν 进制数若具有这样之性质，则称为*良反射的*.

一个 $2\varepsilon + 1$ 位的 ν 进制数，若 $0, 1, 2, \cdots, \nu - 1$ 均至少出现一次而且它是良次序的，良多面形的，和良反射的，则称之为*良满足的*. 当然，由上面所讨论的可知，一个多面形的任何 F–码是良满足的.

第四，若在 X 中的一段 $x_i x_{i+1} \cdots x_j$, $1 \le i < j \le 2\varepsilon$, 使得所有 $x_l, l = i, i+1, \cdots, j$, 均第一次出现，则它本身必为自然序列 $0, 1, 2, \cdots, \nu - 1$ 中的一段. 而且，如果 $x_l = x_j$ 和 $x_{l+1} = x_j - 1$, $2 \le x_l \le \nu - 1$, 则 x_j 在 $x_l x_{l+1}$ 之后在 X 中永不出现，即 $\forall i (i > l)$, $x_i \ne x_j$. 一个 $2\varepsilon + 1$ 位的 ν 进制数，$\varepsilon \ge \nu - 1$, 若它具有这种性质，则称之为*良分配的*.

引理 10.2.1　*任何一个 $2\varepsilon + 1$ 位的 ν 进制数 $Z = z_1 z_2 \cdots z_{2\varepsilon+1}$, 若 Z 是良满足的，则 Z 必是良分配的.*

证　因为 $0, 1, 2, \cdots, \nu - 1$ 中之每个在 Z 中至少出现一次，由良次序性，任何一段 $z_i z_{i+1} \cdots z_j$ 使得所有 z_l, $i < l < j$, 为 Z 中第一次出现者均组成自然序列的一段. 而且，从良反射性和良多面形性即可得 Z 的良分配性. □

一个 $2\varepsilon + 1$ 位的 ν 进制数 $X = x_1, x_2 \cdots, x_{2\varepsilon+1}$, 如果它是

良次序的而且可以通过收缩所有可能的段

$$x_{i-1}x_ix_{i+1},\ x_i < x_{i-1} = x_{i+1},\ 2 \le i \le 2\varepsilon$$

为一位 $x(= x_{i-1} = x_{i+1})$, 这就相当把 X 作为一个单面形去掉所有 X 中的反射边，而得到一个 $2\nu+1$ 位的 ν 进制数形成一个确向树的平面嵌入，则称 X 为*完全地可收缩的*.

引理 10.2.2 一个 $2\varepsilon+1$ 位的 ν 进制数是良满足的，当且仅当它是完全地可收缩的.

证 由良反射性,收缩所有的 $x_{i-1}x_ix_{i+1}, x_i < x_{i-1} = x_{i+1}$, $2 \le i \le 2\varepsilon$, 均变为一位数 $x = x_{i-1}(= x_{i-1}$ 同样地) 而得到的就是一个 $2\nu-1$ 位的 ν 进制数. 而且，它是良次序的和良多面形的. 事实上，从良多面形性可知它本身即一个树在平面上的嵌入. 因此，由良次序性，它是一个确向树的平面嵌入. 必要性得证.

反之，由完全可收缩性，容易验证充分性. ♮

定理 10.2.2 一个 $2\varepsilon+1$ 位的 ν 进制数 X 是一个每边恰与两个面关联的多面形的 F- 码，当且仅当它是良满足的.

证 由上面所讨论的，必要性显然. 反之，根据良满足性，我们有

$$\Sigma = (f_1, f_2, \cdots, f_\varphi) \tag{10.2.4}$$

由 (10.2.1-3) 所确定并且为一个多面形. 在它上按照 FOD- 过程所得的 F- 码就是 X. 这就得到了充分性. ♮

进而，由引理 10.2.2, 即可得一个 $2\varepsilon+1$ 位 ν 进制数是某个多面形的 F- 码的一个表征. 据此，可以方便地设计一个线性时间算法以利用计算机识别.

定理 10.2.3　一个 $2\varepsilon+1$ 位 ν 进制数 X 是某个每边均恰与两个面关联的多面形的一个 F- 码，当且仅当它是完全地可收缩的. ♮

例如，下面的 25 位 8 进制数

$$X_1=\underbrace{012345(0}_{f_1}\overbrace{0)567(4}^{f_2}\underbrace{4)7(2}_{f_3}\overbrace{2)76(1}^{f_4}\underbrace{1)654}_{f_3}\overbrace{4)3(0}^{f_2}\overbrace{0)3(2}^{f_4}\underbrace{2)(1}_{f_3}\overbrace{1)0}^{f_4}$$

就是良满足的并伴随 (f_1,f_2,f_3,f_4) 如下：

$$f_1=(0,1,2,3,4,5),\qquad f_2=(0,5,6,7,4,3)$$

$$f_3=(4,7,2,1,6,5),\qquad f_4=(2,7,6,1,0,3).$$

其中以及随后，(xx), $x=0,1,2,\cdots$, 表示一位数 x 以便识别 $f_1,f_2,\cdots,f_\varphi$. 由定理 10.2.2, X_1 是一个多面形的 F- 码. 事实上，如图 10.2.1(a) 所示，它是在环面上的 (3.6)— 多面形的一个 F- 码.

同时，下面的 25 位的 8 进制数

$$X_2=\underbrace{012345(0}_{f_1\to}\overbrace{0)56(2}^{f_2\to}\underbrace{2)67(3}_{f_4\to}\overbrace{3)7(0}^{f_3\to}\underbrace{0)7654(1}_{f_3\to}\underbrace{1)4(3}_{f_4\leftarrow}\overbrace{3)(2}^{f_2\leftarrow}\underbrace{2)(1}_{f_4\leftarrow}\underbrace{1)0}_{f_3\to}$$

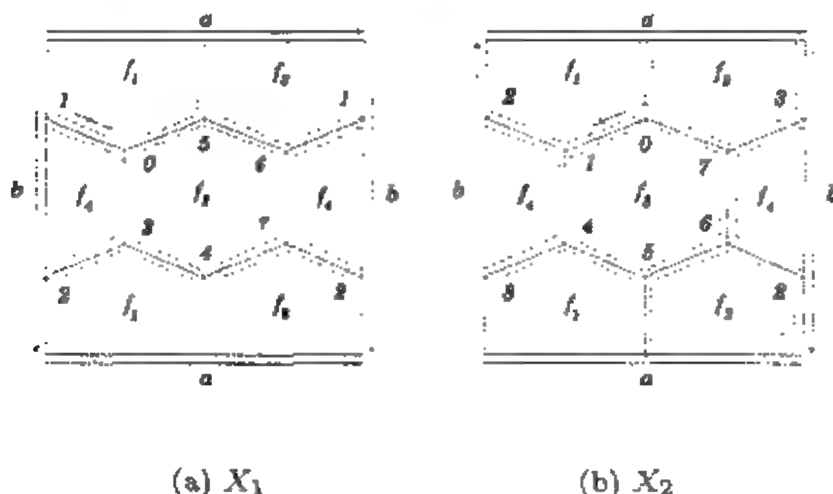
也是良性满足的伴随 (f_1,f_2,f_3,f_4) 如下给出：

$$f_1=(0,1,2,3,4,5),\qquad f_2=(0,5,6,2,3,7),$$

$$f_3=(0,7,6,5,4,1),\qquad f_4=(2,6,7,3,4,1).$$

由定理 10.2.2, X_2 同样是一个多面形的 F- 码. 事实上，它也是 (3.6)— 多面形的一个 F- 码，不过它是在 Klein 瓶上，如图

10.2.1(b) 所示. 这里, 在上面 X_2 上下方的 $f_i, i = 1, 2, 3, 4$, 旁之箭头标示了在 f_i 中之走向. 在不可定向曲面上这是必需的以免与可定向之情形混淆.



(a) X_1 (b) X_2

图 10.2.1

另一方面, 若用定理 10.2.3 只是判定 X_1 和 X_2 是否为一个多面形的 F- 码, 由于它们皆完全地可收缩的, 即可得知 X_1 和 X_2 均为某多面形的 F- 码.

多面形 $\Sigma = \Sigma(V, E, F)$ 的一个码, 如果它是由 Σ 的基准图 $G = (V, E)$ 使每边变 2- 重边通过求一个 Euler 回所确定, 则称之为 *Euler的*; 否则, 非 *Euler的*. 当然, 凡多面形的 F- 码皆 Euler 的. 我们也可引进一个多面形的非 Euler 码.

也许人们会想到 FOD- 过程的对偶形式, 依多面形对偶的观点, 姑且称之为 *VOD–过程*, 用它求出多面形的另外的码, 或称它为 *V–码*. 不过, 我们还是建立一个所谓 *St–过程* 以求一个多面形的一个称之为 *St–码*. 当然, 它不再是 Euler 码, 令 $\Sigma = \Sigma(V, E, F)$ 为一个多面形. G 为它的基准图. F 为它的面集. 对于 $v \in V$, 设

$$\sigma_v = ((v, u_1), (v, u_2), \cdots, (v, u_k)) \tag{10.2.5}$$

为在 v 处的旋. 则，记

$$\pi(v) = (u_1, u_2, \cdots, u_h) \tag{10.2.6}$$

为一个循环，或者说 $u_i\pi(v) = u_{i+1}$, $i = 1, 2, \cdots, h$ 和 $u_{h+1} = u_1$. 当然，$N(v) = \{u_1, u_2, \cdots, u_h\}$, 即 v 的邻域. 若 v 用数字 i 表示，则可记

$$\pi(v) = \pi_i, \tag{10.2.7}$$

$i \in \Lambda = \{0, 1, 2, \cdots, \nu - 1\}$.

St- 过程　随着这个过程一步一步地用 Λ 中的数标记节点并确定一个次序. 一条边 e, 若访过二次则记为 $S(e) = \bar{N}$. 和一个节点 v, 若所有与 v 关联的边均访过则记 $S(v) = \bar{N}$.

始规则　选一节点 v, $\pi(v) = (u_1, u_2, \cdots, u_k)$; 和令 v 为标 0 的节点，即 $n(v) = 0$. 取

$$\begin{cases} \pi_0 = (1, 2, \cdots, k); \\ f(i) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, k,\ k = \rho(v); \\ n(u_i) = i,\ i = 1, 2, \cdots, k; \\ S(0) = \bar{N}; \\ \Lambda = \Lambda - \{0, 1, 2, \cdots, k\}. \end{cases}$$

记录 $0\pi_0 = 0(123\cdots k)$.

进行规则　设 $S(i) = \bar{N}$, $i = 0, 1, 2, \cdots, l-1$ 和 $\pi(l) = (u_1, u_2, \cdots, u_s)$. 则，取

$$\pi_l = (f_{(l)}, i_1, i_2, \cdots, i_{s-1}), \quad S(l) = \bar{N}$$

其中，对于 $j = 1, 2, \cdots, s-1$,

$$i_j \begin{cases} \left.\begin{aligned} &= n(u_{j-1}), \\ &f(i_j) = l, \\ &S((l, i_j)) = \bar{N} \end{aligned}\right\} \text{当 } u_{j-1} \text{ 已标上数;} \\ \left.\begin{aligned} &= m = \min\{i|\forall \in \Lambda\}, \\ &n(i_j) = m, \\ &\Lambda = \Lambda - m \end{aligned}\right\} \text{否则.} \end{cases}$$

记录 π_l 得 $0\pi_0\pi_1\cdots\pi_{l-1}\pi_l$.

终规则 当 $\nu - 1$ 已用来标节点，而且，所有的边和所有节点都处状态 $\bar{N}$, 则过程终止.

自然，可以看出，过程结束所记录下来的，或者说所得的 St- 码也是一个 $2\varepsilon + 1$ 位的 ν 进制数. 事实上，即

$$0\pi_0\pi_1\pi_2\cdots\pi_{\nu-1}. \tag{10.2.8}$$

用与对于 F- 码相仿的思路，我们也可以求得一个 $2\varepsilon + 1$ 位 ν 进制数为一个多面形的 St- 码的表征. 篇幅所限，只能留给读者细究. 也许有人想看一看图 10.2.1 的 (a) 与 (b) 中所提供的多面形的 St- 码是怎样的. 前者的 St- 码为

$$0(123)(045)(064)(065)(172)(173)(237)(456).$$

由此，可以求得多面形的面如下：

$$f_1=(1,0,2,6,3,5),\quad f_2=(2,0,3,6,7,4),$$

$$f_3=(3,0,1,4,7,5),\quad f_4=(4,1,5,7,6,2),$$

如图 10.2.2(a) 所示.

后者的 St- 码为

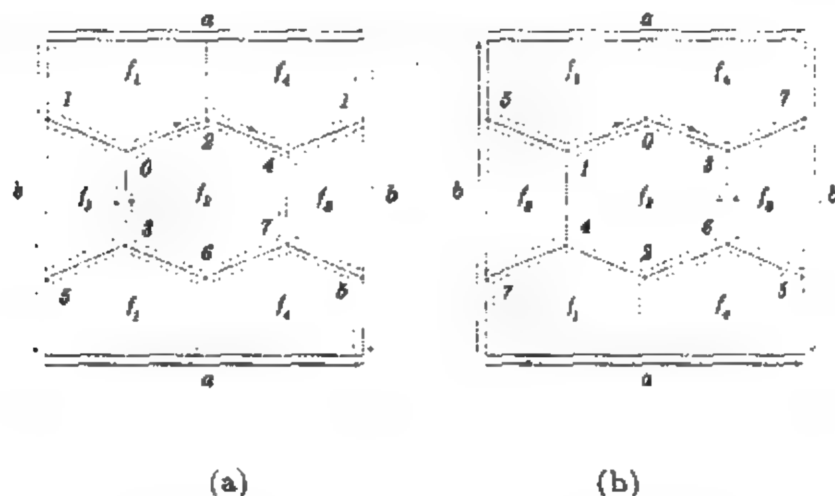
$$0\ (123)\ (045)\ (046)\ (076)\ (127)\ (167)(2\ \overbrace{35)}^{\leftarrow}\ \underbrace{(3\ \overbrace{54}^{\leftarrow})}_{\rightarrow}.$$

其中，若在第 $i+1$ 个括号内有 $\overbrace{x\cdots y}^{\rightarrow}$ 或 $\underbrace{x\cdots y}_{\rightarrow}$, 则在面边界中有 xiy 为一段， $i=0,1,\cdots,\nu-1$. 由此，可得它的面应为

$$f_1=(1,0,2,4,7,5),\quad f_2=(3,0,1,4,2,6),$$

$$f_3=(3,7,4,1,5,6),\quad f_4=(6,2,0,3,7,5),$$

如图 10.2.2(b) 所示. 不管怎样，在不可定向的情形，如上所示在某些节点处与旋反序的情况如箭头所示必发生.



(a)　　(b)

图 10.2.2

§10.3　多面形的同构

由 §10.2 中对于多面形的码所讨论的，自然，使我们想到用同一类型的 Euler 码确定两个多面形是否同构. 然而，一个多面形的两个相等的码即使对于平面的情形一般而言也不能确定它的一个自同构. 例如，在图 10.3.1 中所示的就是这种情形. 这就建议我们寻求这样的条件至少对于平面的多面形有这样的性质：用同一过程，如 §10.2 中的 FOD- 过程或 St- 过程，所得到的二个相等的码确定它的一个自同构.

1　0　2　3　(a)

1　0　2　3　(b)

图 10.3.1

一个多面形，对于它的一类码，若任何二个相等的码均导致它的一个自同构使得始半边相对应，则称这个多面体对这类码是 *同步的*. 若一个多面形对于 F- 码是同步的，就简称为 *F-同步的*. 对于一个多边形，若在一个面的边界上没有一个节点与此边界上的至少三条边关联，则称这个面为 *简单的*.

引理 10.3.1　*一个基准图 $G(\Sigma)$ 非树的多面形 Σ 是 F-同步的，当且仅当其所有面均为简单的.*

证　因为假若在 Σ 上有一个面不是简单的，则由存在一个圈为此面边界所导出的图之真子图. 根据图 10.3.1 中所示的

相仿的理由，可知 Σ 绝不会是 F- 同步的. 这就导致必要性成立.

反之，根据 Σ 的每一个面的简单性，由一个 F- 码用 §10.2 中的方法确定的面集与另一个码所确定的面集是相同的. 则由 FOD- 过程对于始节点和一条与始节点关联的始边的一侧，或者说始半边的唯一性，即可导出 F- 同步性. 这就得到了充分性.

如果 X 是多面形 Σ 的一个 F- 码，则，令 $x(X)$ 为沿 X 的走向所经过每一个四元脆腔中同向半边的序列，和 $\tilde{x}(X)$ 为 $x(X)$ 的共轭, 即

$$\tilde{x}(X) = \beta x(X). \tag{10.3.1}$$

其中，β 如 (10.1.5) 所定义. 我们称 $x(X)$ 和 $\tilde{x}(X)$ 分别为 X 的*迹*和*共轭迹*. 在图 10.3.2(a) 中， F- 码

$$X_1 = 01230313210$$

的迹 $x(X_1)$ 和共轭迹 $\tilde{x}(X_1)$ 如下：

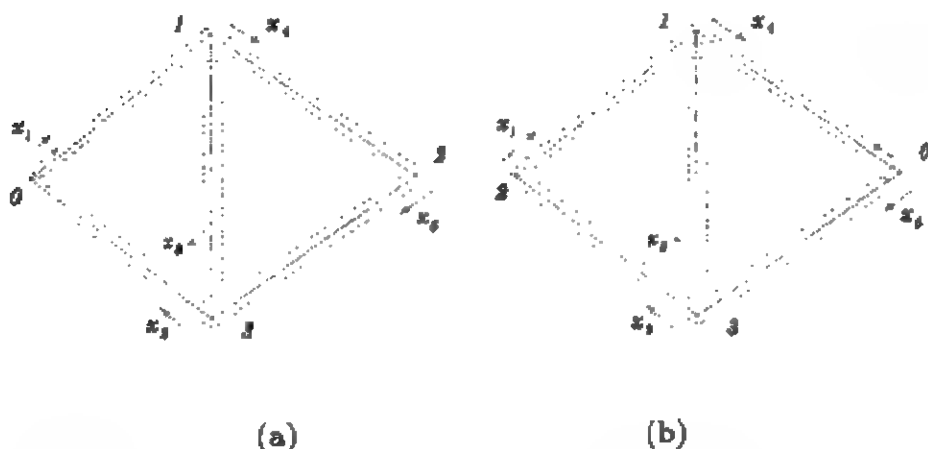
$$\begin{cases} x(X_1) = (x_1, x_4, x_5, x_2, \alpha\beta x_2, x_3, \alpha\beta x_3, \alpha\beta x_5, \alpha\beta x_4, \alpha\beta x_1) \\ \tilde{x}(X_1) = (\beta x_1, \beta x_4, \beta x_5, \beta x_2, \alpha x_2, \beta x_3, \alpha x_3, \alpha x_5, \alpha x_4, \alpha x_1). \end{cases}$$

在图 10.3.2(b) 中， F- 码

$$X_2 = 01230313210 = X_1$$

的迹 $x(X_2)$ 与共轭迹 $\tilde{x}(X_2)$ 如下：

$$\begin{cases} x(X_2) = (\beta x_4, \beta x_1, \beta x_2, \beta x_5, \alpha x_5, \alpha x_3, \beta x_3, \alpha x_2, \alpha x_1, \alpha x_4) \\ \tilde{x}(X_2) = (x_4, x_1, x_2, x_5, \alpha\beta x_5, \alpha\beta x_3, x_3, \alpha\beta x_2, \alpha\beta x_1, \alpha\beta x_4). \end{cases}$$



(a) (b)

图 10.3.2

引理 10.3.2 对于一个 F- 同步的多面形，若它的一个 F- 码在它的所有 4ε 个 F- 码中出现 k 次，则它的任何一个 F- 码均出现 k 次.

证 设 X_1 为多面形 Σ 的一个 F- 码和 X_1 在所有 4ε 个 F- 码中出现 k 次. 令相应的 k 次出现的迹为

$$x_i(X_1) = (s_1^i, s_2^i, \cdots, s_{2\varepsilon}^i), \tag{10.3.2}$$

$i = 1, 2, \cdots, k$. 它们的共轭为

$$\tilde{x}_i(X_1) = (\tilde{s}_1^i, \tilde{s}_2^i, \cdots, \tilde{s}_{2\varepsilon}^i) = (\beta s_1^i, \beta s_2^i, \cdots, \beta s_{2\varepsilon}^i), \tag{10.3.3}$$

$i = 1, 2, \cdots, k$. 进而，令 $\tau_i : \mathcal{X}(\Sigma) \to \mathcal{X}(\Sigma)$ 使得

$$\tau_i(s_j^1) = s_j^i \quad (\tau(\tilde{s}_j^1) = \tilde{s}_j^i), \tag{10.3.4}$$

$i = 1, 2, \cdots, k$ 和 $j = 1, 2, \cdots, 2\varepsilon$. 当然， τ_1 就是全同双射，或者说 $\mathrm{Aut}(\Sigma)$ 中的幺元.

断言 1 所有 $\tau_i, i = 1, 2, \cdots, k$, 皆 Σ 上的自同构.

证 由 F- 同步性和用 FOD- 过程产生 F- 码对于给定始节点和始半边的唯一性，有

$$\begin{cases} \tau_i(\alpha x) = \alpha\tau_i(x); \\ \tau_i(\beta x) = \beta\tau_i(x); \\ \tau_i(\pi x) = \pi\tau_i(x). \end{cases} \tag{10.3.5}$$

其中， $x \in \mathcal{X}(\Sigma)$ 和 $i = 1, 2, \cdots, k$. 由引理 10.1.1 即得断言之结论. ♮

断言 2 $\Gamma = \{\tau_i | i = 1, 2, \cdots, k\} = \text{Aut}(\Sigma)$, 即 Σ 的自同构群.

证 首先，我们证明对任何 i, j, $1 \le i, j \le k$, 存在 $t, 1 \le t \le k$, 使得

$$\tau_t = \tau_j\tau_i. \tag{10.3.6}$$

事实上，由于 $\tau_i(s_1^1) = s_1^i$ 和假设 $\tau_j(s_1^i) = s$, 有

$$\tau_j\tau_i(s_1^1) = s. \tag{10.3.7}$$

然而，由断言 1, $\tau_j\tau_i$ 必也为 Σ 上的一个自同构. 由 F- 码对于始半边 s 的唯一性，则存在 t 使得 $s = s_1^t$, $1 \le t \le k$. 从而，即得 (10.3.6).

然后，我们证明对任一个 Σ 上自同构 τ, 存在一个 t, $1 \le t \le k$, 使得 $\tau = \tau_t$. 假设 $\tau(s_1^1) = s$. 由于从 s_1^1 出发的 F- 码记为 X_1 和 τ 是 Σ 上的一个自同构. 故，从 s 出发的 F- 码亦为 X_1. 这就是说存在一个 t, $1 \le t \le k$, 使得 $s = s_1^t$. 从而， $\tau = \tau_t$. ♮

由上述二个断言，引理即被导出. ♮

这个引理使我们能够通过利用 F- 码，判断两个 F- 同步的多面形是否同构. 同时，其证明过程也使我们能够求出一个 F- 同步的多面形，进而更一般的多面形的自同构群. 甚至，由引理 10.3.2, 还使我们在研究 Σ 上的自同构时只考虑其 F- 码之始半边之对应就够了. 例如，在图 10.3.2 中，那个多面形的每个 F- 码在它的所有 4ϵ 个 F- 码中均出现四次，共有 5 个互不相同的 F- 码. 其中每个均可用一个由四个半边作为始半边的集合表示. 则，有

$$\{x_1, \beta x_4, x_5, \beta x_2\}, \quad \{\beta x_1, x_4, \beta x_5, x_2\},$$

$$\{x_3, \alpha x_3, \beta x_3, \alpha\beta x_3\}, \quad \{\alpha x_1, \alpha\beta x_4, \alpha x_5, \alpha\beta x_2\},$$

$$\{\alpha\beta x_1, \alpha x_4, \alpha\beta x_5, \alpha x_2\}.$$

因此，这个多面形的自同构群是 4 阶的.

引理 10.3.3　两个 F- 同步多面形 Σ_1 和 Σ_2 是同构的，当且仅当 Σ_1 有一个 F- 码与 Σ_2 的一个 F- 码相等.

证　由于 F- 同步性充分性显然. 这里只证必要性.

因为 Σ_1 与 Σ_2 是同构的，可设 τ 是它们之间的一个同构. 令 $x \in \mathcal{X}(\Sigma_1)$ 和 $y \in \mathcal{X}(\Sigma_2)$ 为在 τ 之下相应的二个半边. 则，根据 F- 码对于始半边的唯一性，即得在 Σ_1 上的以 x 为始半边的 F- 码与 Σ_2 中的以 y 为始半边的 F- 码相等. 这就是必要性. □

从引理 10.3.2, 我们可以看出两个 F- 同步的多面形是同构的当且仅当 Σ_1 和 Σ_2 中的所有 F- 码的集合是相同的. 换句话说，若称由一个多面形的所有 F- 码依 ν 进制数值的非降次序排出的序列为它的 F- 表，则由上面的一些引理即知，两个 F-

同步的多面形是同构的当且仅当它们的 F- 表是相同的.

下面, 我们通过引进一些标记到一个多面形的 F- 码的一些段上以区别它的不同的面. 将这种带标记的 F- 码称为 *Fr*-码. 然后证明, 对于 Fr- 码任何多面形均是同步的, 并称为 *Fr*-同步的.

若一个多面形的 F- 码按如下的方式于以处理: 将其上的代表同一面边界的段标以相同的记号和在不同面边界上的段标的记号不同, 带这种标记的 F- 码被称为 *Fr*-码. 在图 10.3.1 的 (a) 和 (b) 中提供的 F- 码是相同的, 即

$$X = 0\,1\,2\,0\,2\,1\,0\,3\,0.$$

但, 它们分别有 Fr- 码 X_1 和 X_2 如下:

$$\begin{cases} X_1 = \underbrace{012(0}_{f_1}\overbrace{0)21(0}^{f_2}\underbrace{0)30}_{f_1}; \\ X_2 = \underbrace{012(0}_{f_1}\overbrace{0)21(00)30}^{f_2}. \end{cases}$$

如果两个 Fr- 码不仅作为 ν 进制数相等而且带有的标记也可以采用相同的, 则称它们是*全同的*.

引理 10.3.4 所有多面形皆 Fr- 同步的.

证 因为对于一个多面形的 Fr- 码, 带有相同标记的段形成一个面的边界, 这个多面形的面集是由 Fr- 码唯一决定的. 故, 不同的 Fr- 码不可能从它们的始半边的对应导出其多面形的一个自同构. 这就得到了引理. □

这个引理使我们能够将引理 10.3.2-3 基于 Fr- 码而推广到

一般多面形而不再加同步性之限制.

引理 10.3.5 若一个多面形的某 Fr- 码出现 k 次，则它的每个 Fr- 码均在所有 4ϵ 个 Fr- 码中出现 k 次.

证 由引理 10.3.4 和引理 10.3.2 即可得. ♮

对于多面形 Σ_1 的一个 Fr- 码 X_1, 设 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 为 4ϵ 个 Fr- 码中所有与 X_1 全同的. 令 τ_i 为由 X_1 和 X_i 使得二者始半边对应所确定的 Σ 上那个自同构. 当然， τ_1 是全同的. 由引理 10.3.5, 集合 $\{\tau_i|i=1,2,\cdots,k\}$ 并不依赖 X_1 的选择. 这里， k 被称为这个多面形 Σ 的 对称乘子.

引理 10.3.6 一个多面形 Σ 的自同构群为

$$\text{Aut}\,(\Sigma)=\{\tau_i|i=1,2,\cdots,k\}. \tag{10.3.8}$$

其中， k 为 Σ 的对称乘子.

证 由与引理 10.3.2 证明中所示的相仿的理由即可得. ♮

根据引理 10.3.6, 我们还即可得

引理 10.3.7 二个多面形 Σ_1 和 Σ_2 是同构的，当且仅当在 Σ_1 上有一个 Fr- 码与 Σ_2 的某 Fr- 码是全同的.

证 与引理 10.3.3 的证明相仿. ♮

若在 $\mathcal{X}(\Sigma)$ 上定义一个线性序，例如在每一个节点处选定一个半边 x 作为第一个，首先从 x 开始沿左旋然后从 αx 开始沿右旋. 当然，若二半边与不同的节点关联，则它们间之次序与代表节点的数的自然序一致. 这样，根据 Fr- 码作为一个 ν-进制数的非降次序，如果相等则依它们的始半边之次序，可以

将所有 Fr- 码排个线性序，称之为这个多面形的 *Fr*-表.

定理 10.3.1　两个多面形 Σ_1 和 Σ_2 是同构的, 当且仅当它们有相同的 Fr- 表.

证　引理 10.3.6-7 的直接结果.

可以构造很多类型的码以表示多面形. 人们也许想看一看如何从多面形的其它类型的码出发沿着由 F- 码到 Fr- 码的思路得到与定理 10.3.1 相仿的定理. 这些都只能留给读者.

§10.4　注记

10.4.1　可平面图的码是于 60 年代由 Weinberg 引进的 [We3],[We5]. 据此，他得到了 3- 连通可平面图的自同构群的最大阶 [We1]. 同时，也给出了判定两个 3- 连通可平面图是否同构的一个有效算法 [We4],[We6]. 然而，基于本章中的讨论，可以使我们得到一般的可平面图不一定是 3- 连通的有关结果.

10.4.2　我们也可以通过将非可平面图嵌入到曲面上的办法判定更一般的，不一定是可平面的图之间是否同构. 然而，其有效性当然与一个图在一个曲面上的不同嵌入数密切相关.

10.4.3　在 70 年代， Hopcroft 和 Tarjan 对 3- 连通可平面图判定同构与否也曾提供过算法. 不过，他们的算法主要依赖于数据的结构 [HoT2-3].

10.4.4　Hopcroft 和 Wong 曾建议一系列的运算以简化判定 3- 连通可平面图是否同构的手续以便求得更为有效的算法 [HW1]. 这里，我们有理由建议利用定理 10.1.2 以及用相仿的方式进一步得到的也许为此目的更为有效.

10.4.5 在可平面的情形，允许我们利用平面性辅助图和模 2 或布尔方程的解以检验它们之间是否同构 [Liu1], [Liu23-24], [Wu2].

10.4.6 码还曾用于平面地图的计数 [Cor1], [CrM1].

第十一章

图的分解

§11.1　双连通分解

虽然将一个图分解为块，或者说不可分离片，或者说双连通片 (2- 连通片) 当图限制为简单的，正如我们这里所约定的，有多种途径．我们却以一种新的方式，通过利用在第五章和第七章中所引进的平面性辅助图给出了双连通片的表征．

令 $G = (V, E)$ 是一个图，Tod 为 G 上的一个确向树如 §2.2 所述．为方便，我们这里利用 §5.4 中所定义的平面性 1- 辅助图．当然，为降低计算复杂性，在 §5.3 中引进的平面性 0- 辅助图和在 §7.3 中所引进的平面性 2- 辅助图也可以相仿地用来刻划双连通片．

令 $H = Aux_1(G; Tod)$ 为 G 的对于确向树 Tod 的一个平面性 1- 辅助图，对于任何一个上树边 α，总是视为 H 的节点．令 $h(\alpha)$ 和 $t(\alpha)$ 分别为 α 的首和尾．因为在 V 上由确向树 Tod 引入一个偏序集，且一个上树边的首与尾在这个偏序之下总是可比较的，我们可以定义上树边总是由大到小的方向．同时，树 Tod 上的边总是由小到大．而且，我们还可在上树边集上或者说在 H 的节点集上引进两类偏序．一个是根据首，另一个是

根据尾，在 V 上的偏序之下确定前者不共首，后者不共尾的上树边之序. 对前者情形下共首的上树边，或后者情形下共尾的上树的序则要根据在 G 的每一节点事先规定的与之关联边的线性序所决定. 为方便，我们只用 $\preceq$ 表示所有的这些偏序以自然的方式而不加特别说明.

对每一个节点 $\alpha \in V(H)$, 令 $h(\alpha)$ 和 $t(\alpha)$ 作为相应上树边的首与尾. 且，记

$$\begin{cases} A(S) = \{h(\alpha)|\forall\alpha \in S\}; \\ B(S) = \{b(\alpha)|\forall\alpha \in S\}. \end{cases} \tag{11.1.1}$$

其中， $S \subset V(H)$. 若 S 是 H 的一个子图 H_1 的节点集，也可以用 $A(H_1)$ 和 $B(H_1)$ 分别代替 $A(S)$ 和 $B(S)$.

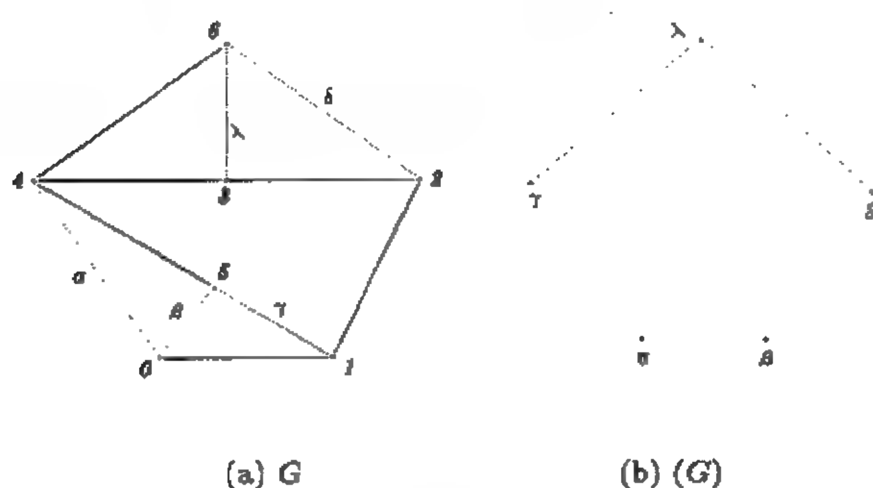
引理 11.1.1 令 α 和 β 为对于确向树 Tod 的 G 中二条上树边. 若 α 和 β 在 G 的不同的双连通片中，则它们在 H 的不同的连通片中.

证 用反证法. 设 α 和 β 在 H 的同一连通片中，而且同时 α 和 β 分别在 G 的两个不同的双连通片 G_1 和 G_2 中.

因为 α 和 β 在 H 的同一连通片中，在 H 中有一条连 α 和 β 的路 $P(\alpha,\beta)$. 由 §5.4 中所述的 H 的结构可知在 G 中存在一个圈的序列 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 使得 $\alpha \in C_1$ 和 $\beta \in C_k$, $k \geq 2$, 并且 $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \cdots, k-1$. 这就是说， α 和 β 必在 G 的同一个双连通片上. 与假设的条件矛盾. ▯

这个引理告诉我们，为确定图 G 的双连通片只需讨论 H 的连通片. 当然，绝非图 G 的每个双连通片均恰对应 H 的一个连通片. 在图 11.1.1 中， (a) 所示的图 G 本身就是一个双连通片. 然， (b) 所示的为 G 的平面性 0- 辅助图 H 却有 3 个连

通片. 在 (a) 中粗线表示确向树 Tod.



(a) G (b) (G)

图 11.1.1

引理 11.1.2 对于任何二条上树边 α 和 β, 它们相应的基本圈 C_α 和 C_β 在 G 的同一个双连通片上, 当且仅当对确向树 Tod,

$$\max\{h(\alpha_0),h(\beta_0)\} \prec \inf\{t(\alpha),t(\beta)\}. \tag{11.1.2}$$

其中, 对于 $\gamma=\alpha$ 和 β, $h(\gamma_0)=\min\{h(\gamma_1)|\forall\gamma_1\notin Tod,\ h(\gamma_1)\preceq h(\gamma),\ t(\gamma)\preceq t(\gamma_1)\}$.

证 先证必要性. 设 C_α 和 C_β 在 G 的同一个双连通片上, 如果 α 和 β 不满足 (11.1.2), 则有两种可能的情形要讨论:

情形 1 $h(\alpha_0)$ 和 $h(\beta_0)$ 是不可比较的, 因为这时 $C_{\alpha_0}\cap C_{\beta_0}=\emptyset$, α 和 β 不可能在 G 的同一个连通片上. 与前提条件矛盾.

情形 2 否则, 因为 $h(\alpha_0)$ 和 $h(\beta_0)$ 分别为圈 C_{α_0} 和 C_{β_0} 上的最小节点, 只可能 $v=\min\{h(\alpha_0),h(\beta_0)\}=\inf\{t(\alpha),t(\beta)$. 不管怎样, 这将导致 v 是 G 的一个割点使得 α 和 β 落在 G 的不同的双连通片上. 又与前提条件矛盾.

再证充分性. 假设 α 和 β 为满足 (11.1.2) 的二条上树边. 因为 $C_{\alpha_0} \cap C_{\beta_0}$ 为 Tod 上的一条非平凡的路, α 和 β 与 α_0 和 β_0 一样在 G 的同一个双连通片上. ♮

为了用一个图 G 的平面性辅助图 H 确定 G 的双连通片, 根据引理 11.1.2 我们可以将 H 的连通片分类. 若 H 的二个连通片 H_1 和 H_2 具有这样的性质: 在 H_1 中有一个节点 α 和在 H_2 中有一个节点 β 使得在 G 中的相应上树边 α 和 β 满足 (11.1.2), 则称 H_1 与 H_2 是 *同循环的*. 我们通过检查 §1.2 中的 $O1, O2$ 和 $O3$ 可以看出两个连通片之间的同循环性是一个等价关系, 并用 $\sim_h$ 表示. H 的每一个同循环类被称为 *同循环片*. 对于 H 的一个同循环片 A, 令

$$G_A = \bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha.$$

其中, A 也视为同循环片 A 上的节点集, α 既为 A 中之节点又是 G 中的上树边. 称 G_A 为原图 G 上的同循环片 A 的 *同循环象*.

定理 11.1.1 对于图 G, 其上的所有同循环象不随确向树 Tod 的选择而改变而且它们均为 G 的非平凡的双连通片.

证 由于平凡的双连通片, 即仅由一条边组成的, 为割边, 它含在任何的支撑树, 特别地, 确向树上. 故, 在 H 中不会有连通片对应 G 中的平凡双连通片.

先证第一个结论. 用反证法. 假设 $G_A(Tod_1)$ 和 $G_B(Tod_2)$ 分别为对于 Tod_1 和 Tod_2 的同循环片 A 和 B 的同循环象而且满足:

$$
\begin{cases}
G_A(Tod_1) \cap G_B(Tod_2) \neq \emptyset; \\
G_A(Tod_1) \neq G_B(Tod_2).
\end{cases} \tag{11.1.3}
$$

若有一边 e 在 $G_A(Tod_1)$ 中但不在 $G_A(Tod_2)$ 中，则存在一个同循环片 $B_1 \neq B$ 使得 e 在 $G_{B_1}(Tod_2)$ 中. 因为 e 本身不会是 G 的一个双连通片， e 必落在某个圈上. 由引理 11.1.2 所蕴含的对于 Tod_2 的同循环片的唯一性，必有 $B_1 = B$. 与 $B_1 \neq B$ 矛盾. 从而，只能不会有边在 $G_A(Tod_1)$ 中而不在 $G_A(Tod_2)$ 中. 相仿地，也可以看出同样不会有边在 $G_B(Tod_2)$ 中而不在 $G_A(Tod_1)$ 中. 然，这又与条件 (11.1.3) 矛盾.

由第一个结论和引理 11.1.2 即可得第二个结论. ♮

一个割点，如果它只与平凡的双连通片关联，也被称为*平凡的*. 容易看出，一个割点是平凡的，当且仅当对于确向树 Tod 没有同循环象与之关联.

引理 11.1.3 对于一个非平凡的割点，总有一个同循环象使得它的最小节点就是这个割点.

证 用反证法. 设 v 是一个非平凡的割点但不是任何一个同循环象的最小节点. 令 v 为对于某确向树 Tod 的同循环象 G_A 和 G_B 的公共节点. 由非最小性，在 G_A 中存在一个 $v(A)$ 被 v 覆盖和在 G_B 中存在一个 $v(B)$ 被 v 所覆盖. 然而，在 Tod 上的 v 处至多有一条边指向 v. 就是说， G_A 和 G_B 在同一个同循环片上. 与 v 为割点矛盾. ♮

定理 11.1.2 对给定图 G 上的一个确向树 Tod, 一个非 Tod 的根的节点是非平凡割点当且仅当存在一个同循环象以它为最小节点和根节点是非平凡割点当且仅当它在 Tod 上的次

大于 1.

证 由引理 11.1.3, 只需证明第一个结论的充分性. 设 v 为某同循环片 G_A 上的最小节点且非 Tod 的根. 因为 v 不是根, 在 Tod 上有一个节点 u 被 v 覆盖. 又, 因为最小性, u 不可能在 G_A 上. 故, v 必为 G 的一个割点. 由于 G_A 为非平凡双连通片. 从而, v 为非平凡的割点.

第二个结论可由 §2.2 中所描述的求一个确向树的过程直接导出. ♮

§11.2 叁连通分解

令 $G=(V,E)$ 是一个图. 对于 V, 用它的子集 $V_i, i=1,2,\cdots,h$, 的并表示, 如

$$V=\bigcup_{i=1}^{k} V_i. \tag{11.2.1}$$

记 $G_i=G[V_i]$ 为 G 上由 V_i 导出的子图, $i=1,\cdots,k$. 设 $V_i\cap(\cup_{1\le j\le k, j\ne i}V_j)=A_i$, $i=1,2,\cdots,k$. 若在 G_i 上将 A_i, $i=1,2,\cdots,k$, 中所有不相邻的二节点都连一条边, 记所得的图为 $\bar{G}_i$, 并称之为 G_i 的 *相邻扩张*. 若表达式 (11.2.1) 满足: 对 $i\ne j$, $i,j=1,2,\cdots,k$,

$$|V_i\cap V_j|\le 2; \tag{11.2.2}$$

对于 $i=1,2,\cdots,k$,

$$|V_i\cap(\cup_{1\le j\le k, j\ne i}V_j)|=2; \tag{11.2.3}$$

和所有 G_i 的相邻扩张 $\bar{G}_i, i=1,2,\cdots,k$, 全是 3- 连通的, 则称 G 的如下表示

$$G=\bigcup_{i=1}^{k} G_i \tag{11.2.4}$$

为 G 的一个 *叁连通分解*.

对于一个 2- 连通图 G, 容易看出如 (11.2.4) 给出的叁连通分解一般不是唯一的. 不过, 我们可以证明 $G_i, i=1,2,\cdots,k$, 的相邻扩张的集合 $\{\tilde{G}_i|i=1,2,\cdots,k\}$ 是唯一的. 或者说, $\{V_i|i=1,2,\cdots,k\}$, 其中, $V_i=V(G_i)$, $i=1,2,\cdots,k$, 如 (11.2.1-3) 中所示是适定的. 这里, $\tilde{G}_i, i=1,2,\cdots,k$, 被称为 G 的 *叁连通片*(或 *3-连通片*). 当然, 这个说法与 §4.3 中所说的基本劈块是等价的. 每个 3- 连通片的节点集被称为 G 的一个 *原子*.

引理 11.2.1 *若一个 2- 连通图 G 有形式:*

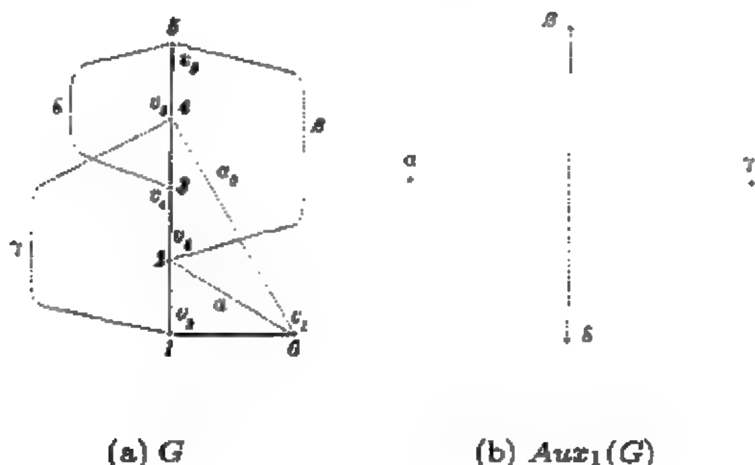
$$G=G_1\cup G_2,\qquad G_1\cap G_2=\{u,v\},\tag{11.2.5}$$

则对于任何确向树, 在平面性 1- 辅助图 $Aux_1(G)$ 上, 没有一个与 G_1 关联的节点和一个与 G_2 关联的节点是相邻的.

证 因为 $\{u,v\}$ 是一个劈对, 对任何一个确向树 Tod, 在 Tod 上总有一条有向路连 u 和 v. 不妨设 $u\prec v$. 而且, 这条从 u 到 v 的有向路是在 G_1 上. 对任何 $\alpha\in\overline{Tod}\ (G_1)$ 和 $\beta\in\overline{Tod}\ (G_2)$, 为了二者相邻, 必有或者 $h(\beta)\preceq u$ 和 $h(\alpha)\prec \inf(t(\alpha),t(\beta))$; 否则, $h(\alpha)\preceq h(\beta)=\inf(t(\alpha),t(\beta))$. 在后一情形, 根据 §5.4 中所讨论的, 在 $Aux_1(G)$ 中 α 和 β 不可能相邻. 在前一情形, 因为既不存在 $\gamma\in\overline{Tod}(G_1)$, $h(\gamma)\prec h(\beta)$, 当 $h(\beta)\prec h(\alpha)$ 时也不存在 $\gamma\in\overline{Tod}(G_2)$, $h(\gamma)\prec h(\alpha)$, 当 $h(\alpha)\prec h(\beta)$ 使得 α 和 β 同在类型 A 中, 又, 类型 A 是使 α 和 β 相邻的仅有的可能. 从而, α 不可能与 β 相邻. ♮

根据这个引理, 我们可以看到对任何确向树 Tod, G 中的在不同 3- 连通片中的上树边为相应的平面性 1- 辅助图的不同连通片中的节点. 然而, 平面性 1- 辅助图中连通片的数目并

不是随 Tod 的选择不变. 例如在图 11.2.1 中, (a) 给出的 G, 其中粗线为 Tod. (b) 给出了 G 的平面性 1- 辅助图 $Aux_1(G)$, 它有三个连通片.



(a) G　　(b) $Aux_1(G)$

图 11.2.1

事实上, $Aux_1(G)$ 的以 α 和 γ 组成的二个连通片对应于 G 的二个 3- 连通片中的同一个. 它们每个均为四阶完全图 K_4. 其中, $\{v_3, v_5\}$ 为劈对. 若如图 11.2.2 的 (a) 中, 取粗实线的边组成 Tod, 则它的相应的 $Aux_1(G)$ 如 (b) 所示就恰有二个连通片了. 这里, $Aux_1(G)$ 的每一个连通片恰相应 G 中的一个 3- 连通片.

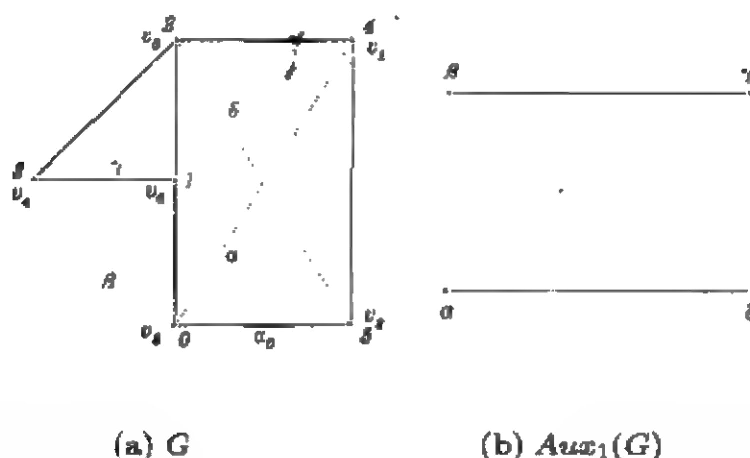
为了求出 $Aux_1(G)$ 上的一个不变量以确定 G 的 3- 连通片, 我们必需对于确向树将 $Aux_1(G)$ 上的连通片进行分类.

对于 G 的一个确向树 Tod, 由 $Aux_1(G)$ 的一个连通片 A 所产生的图

$$G_A = \bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha. \tag{11.2.6}$$

其中, C_α 为由 $\alpha \in \overline{Tod}$ 与 Tod 所成的那个基本圈. G_A 的节点集 $V(G_A)$ 被称为 G 的 *半原子*. 若 A 和 B 是 $Aux_1(G)$ 中的两个连通片, 并且与 A, B 相应的 G 的两个半原子是一个包含另

一个，则称 A 和 B 是 同网的.



(a) G　　(b) $Aux_1(G)$

图 11.2.2

通过引进传递性，可以将 $Aux_1(G)$ 的连通片间的同网关系延拓为一个等价关系. 根据它将 $Aux_1(G)$ 中的连通片分类. 其中的每一类被称为 $Aux_1(G)$ 的 同网片. $Aux_1(G)$ 的同一类中的连通片所相应的半原子之并被称为 G 的一个 准原子.

引理 11.2.2　对于任一同网片 A，由 (11.2.6) 所确定的 G_A 与 G 的一个 3– 连通片同胚.

证　用反证法. 设 G_A 含有 G 的一个分离对 $\{u,v\}$ 使得

$$G_A = G_1 \cup G_2, \quad G_1 \cap G_2 = \{u,v\}.$$

其中， G_1 和 G_2 皆非平凡的. 由引理 11.2.1 知 G_1 和 G_2 必分别相应 $Aux_1(G)$ 的连通片 A_1 和 A_2. 因为既无 $V(G_1) \subseteq V(G_2)$ 亦无 $V(G_2) \subseteq V(G_1)$, A_1 与 A_2 非同网. 然而， $A = A_1 \cup A_2$ 与 A 本身是个同网片矛盾. ♮

对于 $R \subseteq V$, 令 $V - \hat{R}$ 为所有那些关联边不全在 $G[R]$, 即 R 在 G 上的节点导出子图中的节点的集合.

引理 11.2.3 对于一个准原子 R, 若

$$I(R) = R \cap (V - \hat{R}) \neq \emptyset, \tag{11.2.7}$$

则 $I(R)$ 形成由 Tod 所确定的偏序集 V 上的一个非平凡的链的集合.

证 由引理 11.2.2, $I(R)$ 至少含 G 的一个劈对, 用 $\{u,v\}$ 表示. 不失一般性, 可设 $u \prec v$ 而且在 Tod 上从 u 到 v 的路 $P(u,v)$ 在 R 上由 (11.2.6) 产生的子图中. 由 2- 连通性, 至少有一个上树边 α 使得 $h(\alpha), t(\alpha) \in V - \hat{R}$ 且满足 $h(\alpha) \preceq u \prec v \preceq t(\alpha)$. 这就是说 $P(u,v)$ 也在 $V - \hat{R}$ 上由 (11.2.6) 所产生的子图中. 而且容易看出, $P(u,v)$ 的节点集, 偏序集 V 中的一个链不是 R 和 $V - \hat{R}$ 上二子图之公共子图的任一连通片的真子图. 从而, 由于 $I(R)$ 中至少包含一个劈对, 即得引理. ▮

由引理 11.2.2-3, 我们即可看到, 一般而言, 准原子仍然依赖 Tod 的选择. 然而, 只是一个准原子 R 和 $V - \hat{R}$ 的公共部分依赖 Tod 的选择.

引理 11.2.4 $Aux_1(G)$ 的同网片的数目不依赖确向树 Tod 的选择.

证 因为存在 $Aux_1(G)$ 的同网片与 G 的准原子之间的一个 $1-1$ 对应, 从引理 11.2.2-3, 即可得引理. ▮

至此, 或许有人要回到图 11.2.1-2 所示的那个例子看一看. 由于图 11.2.1(b) 中的 $Aux_1(G)$ 的二个连通片 γ 和 α 是同网的, 故 $Aux_1(G)$ 只有二个同网片. 这个数目与图 11.2.2(b) 中的 $Aux_1(G)$ 的是相同的. 对此, 亦见同网片的数目与 Tod 的选择无关.

因为我们总是讨论 2- 连通的图 G 而不带 2- 节点, 由准

原子在 G 上导出的子图，只有那些与其余部分之公共路中的内节点为 2- 节点. 从而，一个准原子中的那个由它的导出子图的非 2- 节点形成的子集就是 G 的一个原子.

定理 11.2.1 对于在一个 2- 连通的图 $G=(V,E)$ 上任选的确向树 Tod, 令 $A_i, i=1,2,\cdots,k$, 为由 $Aux_1(G)$ 所确定的原子. 则由 $A_i, i=1,2,\cdots,k$, 在 G 上导出的子图 G_i 形成 G 的一个 3- 连通分解和

$$\tilde{G}_i = G_i + U_i,$$

$i=1,2,\cdots,k$, 其中 $U_i=\{(u,v)|\{u,v\}$ 为 G_i 上 G 的劈对且 $(u,v)\notin E\}$, 皆 G 的 3- 连通片.

证 由引理 11.2.2-4 可直接导出. □

设 $H_i, i=1,2,\cdots,k$, 为 G 的所有 3- 连通片和 $V_i=V(H_i)$. 我们可以造一个新图，称之为 G 的 *原子结构*. 它的节点为 G 的原子，即 $V_i, i=1,2,\cdots,k$. 两个节点相邻，当且仅当它们所代表的原子至少有一个公共节点.

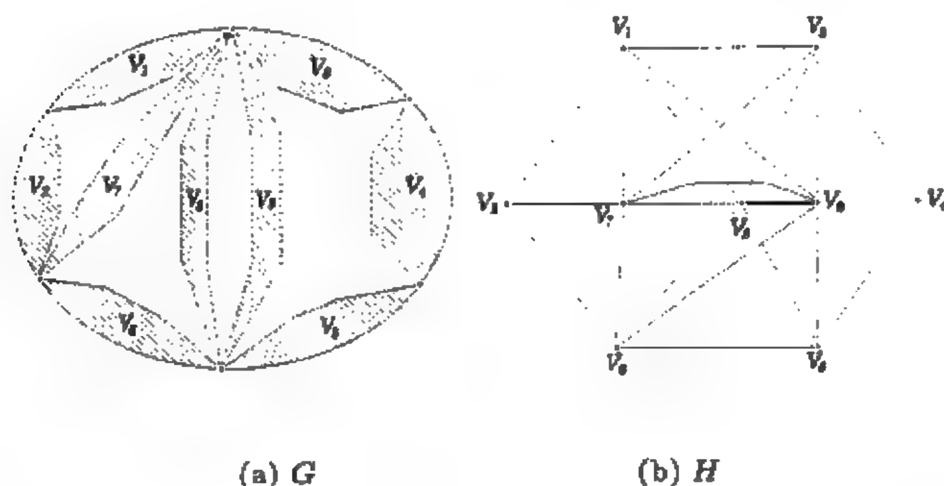
引理 11.2.5 一个 2-连通图 G 的原子结构 $H=(U,B)$ 具有这样的性质：其边集可以划分为二个部分 B_1 和 B_2 使得 B_1 中的边均在 $H[B_1]$ 的某无弦圈上和 B_2 的每一条边均在 $H[B_2]$ 的一个团上. 其中，$H[B_1]$ 和 $H[B_2]$ 分别为在 H 上由 B_1 和 B_2 导出的子图.

证 因为二个原子在 H 中相邻只有二种情形：或者它们有二个公共节点形成一个劈对；或者它们有一个公共节点在某个劈对中. 则，B 划分的 B_1 和 B_2 分别相应后者和前者的边.

由 G 的 2- 连通性，和 B_1 中的每一边的每个端点与某个劈对相应，则在 $H[B_1]$ 中的每一边均在某圈上. 自然，它是无弦

的. 对于 B_2, 若一边相应的劈对只与二个原子关联，则它必为 $H[B_2]$ 的一个割边，它本身就是一个团，即平凡的团. 否则，这条边必在 $H[B_2]$ 的一个非平凡的团上. ▯

在图 11.2.3 中，(a) 给出了 G. 其中，带阴影的部分表示一个原子. (b) 给出的是 G 的原子结构. 其中的粗线表示在 B_2 中的边. 实际上，它只有一条边. 自然，自成一团. 细线的就是 B_1 中的边了.



(a) G　　　(b) H

图 11.2.3

定理 11.2.2 一个节点对 $\{u,v\}$ 是 G 的一个劈对当且仅当对一个给定的确向树，或者有原子 $V_i, i=1,2,\cdots,s$, 使得 $(V_1, V_2,\cdots,V_s)$ 形成一个无弦圈且有性质：$u,v\in V_1$, $V_1\cap V_2=\{u\}$ 和 $V_s\cap V_1=\{v\}$; 或者有两个原子 V_1 和 V_2 使得 $V_1\cap V_2=\{u,v\}$.

证 由定理 11.2.1 和引理 11.2.5 直接可得. ▯

根据定理 11.2.1-2, 我们可以对任意给定的一个确向树确定一个 2- 连通图的 3- 连通片和劈对. 这就使我们能够按照一定的目标，如使计算量小，使过程简单等，适当地选择确向树进

行 3- 连通分解.

§11.3　平面分解

经过前两节的讨论，允许我们在这里只研究 3- 连通的图. 对于一个图 $G=(V,E)$, 若 $E=E_1+E_2+\cdots-E_k$ 使得所有边导出子图 $G[E_i], i=1,2,\cdots,k$, 皆可平面的，则

$$G=\bigcup_{i=1}^{k} G[E_i] \tag{11.3.1}$$

被称为 G 的一个 *平面分解*, 或者说 *平面化*. 容易看出，任何一个图均有平面分解. 而且，有各种方法对图进行平面分解.

然而，我们这里所关心的是求图 G 的一个如 (11.3.1) 所示的平面分解使得其中子图的数目 k 尽量的小. 这个最小的 k 被称为图 G 的 *厚度* 或者说 *平面数*.

一般而言，确定图的厚度是一个很难的问题. 直到现在，我们只知道一些特殊图类的厚度，或者只知道一般图的厚度的一些上界或下界.

本节，我们不拟讨论如何确定一些类型的图之厚度或者一般图的厚度的上，下界. 这些可以在目前已经出版的一些书中查到. 此处之目的在于提供一种方法求一般图的平面分解使得其中子图之数目在某种意义下尽可能地少. 它也许会在超大规模集成电路的设计中得以应用.

令 $G=(V,E)$ 为一个图，T 为 G 上的一个树 (当然，支撑的). 若 H 是 G 的一个平面子图使得有这样的性质：T 在 H 上，或者说，H 是 G 的一个 *T-平面子图*, 而且除 H 本身外在 G 上无任何 T- 平面子图也含 H 作为子图，则称这样的 H 为 G 的一个 *T-极大平面图*.

若 (11.3.1) 中的所有子图相互均有公共边形成一个给定的树 T 则称 (11.3.1) 的这种形式为 G 的 *共 T- 平面分解*. 同样地，在一个共 T- 平面分解中，若其中的 T- 平面子图的数目 k 是最小的，则称这个 k 为 G 的 *共 T- 厚度*. 人们也许注意到了，图的共 T- 平面分解不再是一种特殊的平面分解，因为这时的 T- 平面子图的边集并不形成 G 的边集的一个划分.

如果 G 的一个共 T- 平面分解中的所有平面子图对于这个给定的 T 全是 T- 极大的则称之为 *T- 极大平面分解*.

不管是考虑图的共 T- 平面分解和共 T- 厚度还是考虑图的 T- 极大平面分解，其基本的一步就是求一个图的 T- 极大平面子图. 这就是为什么在这一节只集中注意力于对给定的树确定图中的 T- 极大平面子图. 为便于处理，我们还总是限定 T 为确向树 Tod.

又会使人们想到，通过平面性辅助图研究如何去掉图中的一些上树边使剩下的图为它的一个 Tod- 极大平面子图. 不管怎样，我们在下面的例子中将会看到如何去掉上树边的方式不能不考虑. 在图 11.3.1 中，(a) 给出了图 G. 其上的粗实线为确向树 Tod. 它的平面性 0- 辅助图 $Aux_0(G)$ 由 (b) 给出. 其中的粗实线表示权为 1 的边. 因为在 $Aux_0(G)$ 中仅有二个奇权圈，它们无公共边：这就是

$$C_1 = (x_{p,\xi}, y_{\zeta,\xi}, x_{t,\gamma}, y_{s,\delta}, x_{p,\beta}, y_{t,\eta}),$$

和

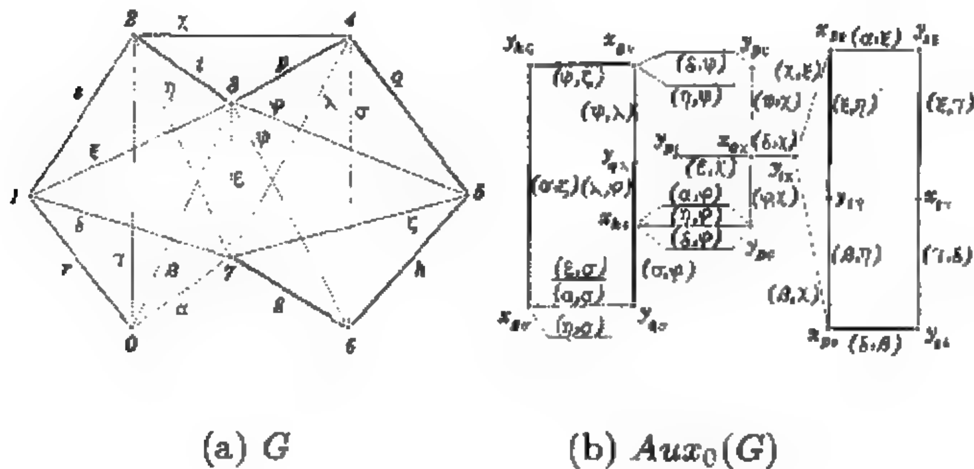
$$C_2 = (x_{g,\sigma}, y_{h,\zeta}, x_{g,\psi}, y_{g,\lambda}, x_{h,\varphi}, y_{q,\sigma}).$$

在 C_2 中，那条 3- 重边 $(y_{q,\sigma}, x_{g,\sigma})$ 被视为一边. 只要在 $Aux_0(G)$ 中去掉 $y_{g,\tau}$ 和 $x_{g,\sigma}$ 之一即可使 C_2 不再存在. 令 $\bar{\tau}(S)$ 为那些与 $Aux_0(G)$ 的一个子图 S 关联的 G 的上树边的集合. 则，可

以看出

$$\begin{cases} \tilde{\tau}(C_1) = \{\xi, \gamma, \delta, \beta, \eta\}; \\ \tilde{\tau}(C_2) = \{\sigma, \zeta, \psi, \lambda, \varphi\}. \end{cases}$$

因为 $\tilde{\tau}(G)\cap\tilde{\tau}(C_2)=\emptyset$, 我们绝不可能从 G 中仅去掉一条上树边而得到一个 Tod- 极大子图. 然，根据 §5.3 中所引进的理论可以从 G 中去掉两条上树边，一条在 $\tilde{\tau}(C_1)$ 中和另一条在 $\tilde{\tau}(C_2)$ 中，而得到它的一个 Tod- 极大平面子图. 仅以 $\{\xi,\sigma\}$ 作为要去掉的上树边为例. 在 $Aux_0(G)$ 中去掉与 ξ 和 σ 关联的节点：$x_{p,\xi}, y_{s,\xi}, x_{g,\sigma}$ 和 $y_{q,\sigma}$ 后所得的 $Aux_0(G)-\{\xi,\sigma\}$ 如图 11.3.2(a) 所示. 这里，不再有奇圈. 事实上，将 G 去掉 ξ 和 σ 二边所得之图有如图 11.3.2(b) 所示的平面嵌入.



(a) G　　(b) $Aux_0(G)$

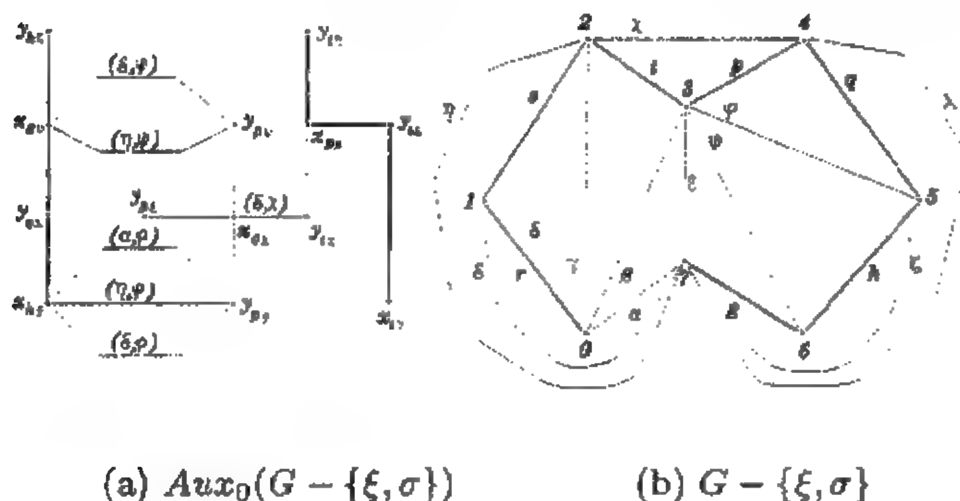
图 11.3.1

引理 11.3.1　令 $Aux_0(G)$ 为图 G 对于确向树 Tod 的平面性 0- 辅助图. 对于上树边 α, 记 $G-\alpha$ 为从 G 中去掉 α 后所得之图. 则，我们有

$$Aux_0(G-\alpha) = Aux_0(G) - X(\alpha)Y(\alpha). \tag{11.3.2}$$

其中，$X(\alpha)Y(\alpha)$ 表示在 $Aux_0(G)$ 中与 α 关联的所有的节点和边.

证 因为 α 是 G 中确向树 Tod 之上树边，G 上的确向树 Tod 仍然是 $G-\alpha$ 上的确向树. 由平面性 0- 辅助图的构造，即得引理. ♮



(a) $Aux_0(G-\{\xi,\sigma\})$ (b) $G-\{\xi,\sigma\}$

图 11.3.2

令 $C_i, i=1,2,\cdots,s$, 为 $Aux_0(G)$ 上的所有基本圈和 $\bar{\tau}(C_i)$ 为与 C_i 上的节点或边关联的 G 中上树边的集合，$i=1,2,\cdots,s$. 若 G 中一个上树边的集合 S 具有性质

$$S\cap\bar{\tau}(C)\neq\emptyset. \tag{11.3.3}$$

其中，C 为 $C_i, i=1,2,\cdots,s$, 中的所有奇权圈使得

$$X(S)Y(S)=\bigcap_{\alpha\in S}\Big(Aux_0(G)-X(\alpha)Y(\alpha)\Big)$$

不再有奇权圈. 则称 S 为 $Aux_0(G)$ 的一个*壳*. 事实上，一个壳总可视为集合 $C_i, i=1,2,\cdots,s$, 的一类覆盖. 如果一个壳的任何一个真子集均非壳，则称为*极小壳*.

定理 11.3.1 对于 G 的一个给定的确向树 Tod, 令 S 为 G 的上树边的一个集合. 则

$$G - S = \bigcap_{\alpha \in S} (G - \alpha)$$

是 G 的一个 Tod- 极大平面子图当且仅当 S 是 $Aux_0(G)$ 的一个极小壳. 其中, $Aux_0(G)$ 为 G 对于 Tod 的平面性 0- 辅助图.

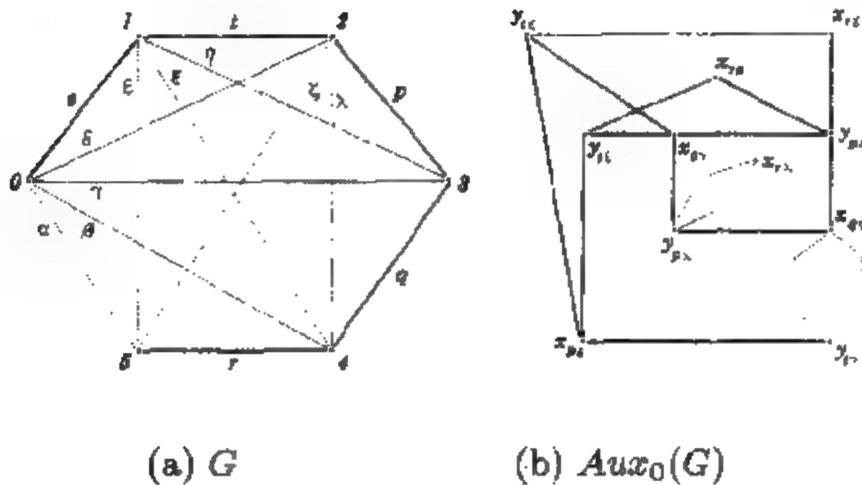
证 必要性. 由引理 11.3.1, 图 $G - S$ 的平面性 0- 辅助图为 $Aux_0(G) - X(S)Y(S)$. 因为 $G - S$ 是 G 的一个 Tod- 极大平面子图. 由定理 5.4.1 中的 (1) 和 (2) 知 S 是 $Aux_0(G)$ 的一个壳, 但对任何 $\alpha \in S$, $S - \{\alpha\}$ 均非 $Aux_0(G)$ 的一个壳. 从而, S 是 $Aux_0(G)$ 的一个极小壳.

充分性. 设 S 是 $Aux_0(G)$ 的一个极小壳. 由引理 11.3.1 和定理 5.4.1 中的 (1) 和 (2), $G - S$ 是 G 的一个平面子图. 然而, 由 S 的极小性, $G - S$ 则是 Tod- 极大的. ∎

从图 11.3.2, 人们也许会想到所有的极小壳具有相同的基数. 然而, 在图 11.3.3 中, (a) 所示的图 G, 粗实线为确向树 Tod, 有 $Aux_0(G)$ 如 (b) 所示. 在 $Aux_0(G)$ 上的粗实线表示权为 1 的边. 可以验证 $\{\varepsilon, \zeta, \lambda\}$ 和 $\{\xi, \eta\}$ 均为极小壳. 但它们的基数不同.

若 G 的一个 T- 极大平面子图具有最大的度, 则称之为 T-最大平面子图. 同样地, 若 $Aux_0(G)$ 的一个极小壳具有最小的基数, 则称它为一个 最小壳. 我们即可发现在定理 11.3.1 中将极大和极小分别用最大和最小代替仍然成立.

根据定理 11.3.1, 我们可以通过逐次地在去掉的上树边与 Tod 所导出的图上求 Tod- 极大平面子图的办法求共 Tod- 平面分解或者 Tod- 极大平面分解.



(a) G (b) $Aux_0(G)$

图 11.3.3

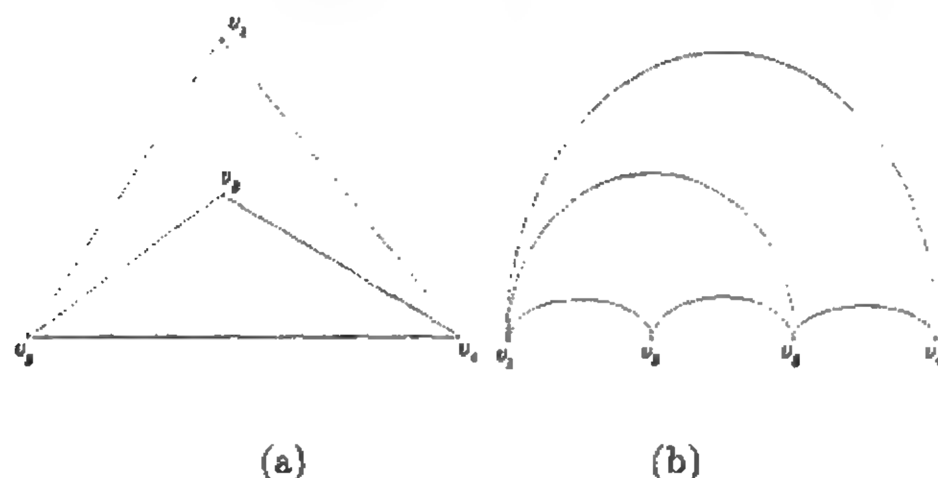
§11.4 页分解

如果一个图 $G=(V,E)$ 可以在一个半平面上表示，我们可以不失一般性假设为欧氏 (x,y)— 平面的上半平面 $y\geq 0$, 使得节点都在直线 $y=0$ 上和所有的边皆上半平面中的 Jordan 线段而且任何一对除在相邻时的公共端点外无任何其它公共点，则称 G 为 *页可嵌入的*, 或者说 *可嵌入页上的*. 这样的一种表示称为 G 的 *页嵌入*. 当然，页嵌入本身也是平面嵌入. 但反之未必然. 例如 K_4 是可平面的. 它的平面嵌入就是正四面体. 但，下面我们就会看到 K_4 不是可嵌入页上的. 不过，在 K_4 上去掉任一边所得的图则是页可嵌入的. 如图 11.4.1 中 (a) 给出了这个图. (b) 给出了它的一个页嵌入.

引理 11.4.1 *任何树皆可嵌入页上.*

证 因为任何树均可嵌入到平面上，我们仅讨论树本身就是它的平面嵌入. 如 §2.1 中所述，可以任取一个节点用 O 表示和一个与 O 关联的边 r. 用 §2.1 中的旅行规则分别以 O 和 r 作为始节点和始边可得一个树的码. 只要将节点依在这个码中

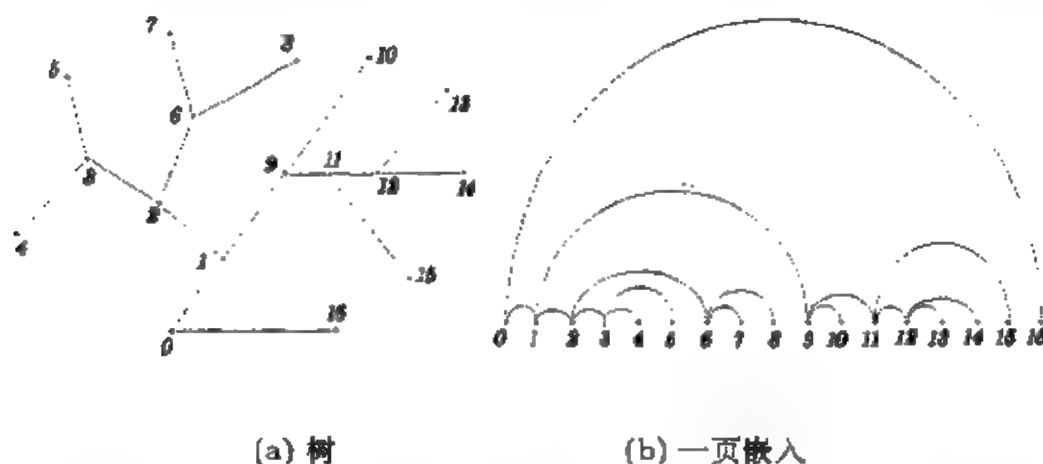
出现的次序从左到右嵌入到直线 $y=0$ 上. 在每个节点处按与树的平面嵌入上的旋的相反次序, 即得这个树的一个页嵌入.



(a) (b)

图 11.4.1

在图 11.4.2 中, 显示了求一个树的页嵌入的过程. (a) 中给出了树的平面嵌入. (b) 中为由这个平面嵌入所产生的页嵌入.



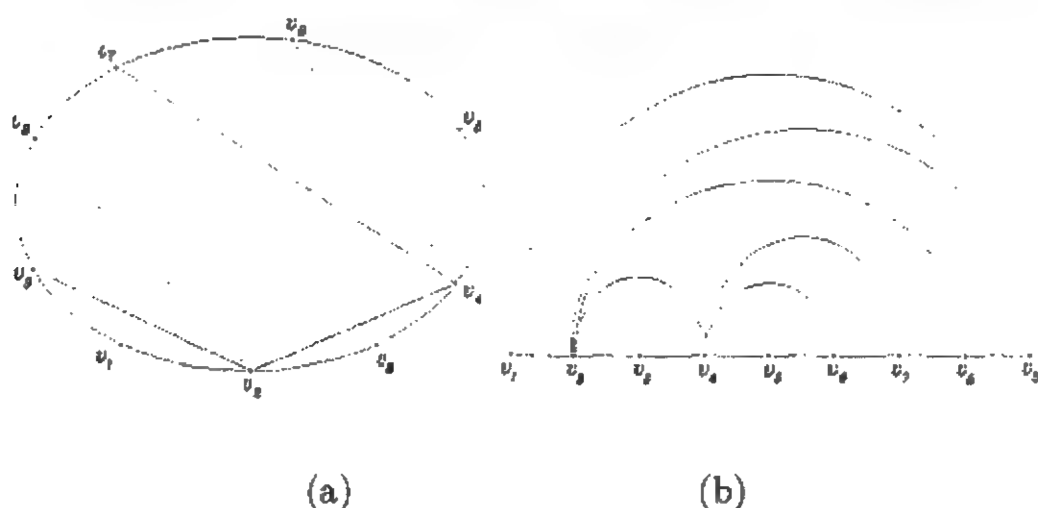
(a) 树 (b) 一页嵌入

图 11.4.2

引理 11.4.2 任何不可分离的外平面图是页可嵌入的.

证　因为一个外平面图可嵌入到平面上使得所有的节点全在无限面的边界上．由不可分离性，无限面的边界实际上是一个圈．我们总可以将所有节点嵌入到 $y=0$ 的直线上使得从左向右出现的次序与在圈上的次序相同．然后，依照节点在这个平面嵌入中旋的次序即可得一个页嵌入．

在图 11.4.3 中，可以看出由引理的证明所提供的过程怎样从 (a) 中的一个外平面图求得 (b) 所示的它的一个页嵌入．



(a)　　　　　　　　(b)

图 11.4.3

定理 11.4.1　一个图是页可嵌入的当且仅当它是一个外平面图．

证　充分性．由外平面性，可以根据节点在其无限面边界上第一次出现之次序从左到右把所有节点嵌入到 $y=0$ 的直线上．然后，用引理 11.4.1-2 的证明中所建议的过程即从图的双连通分解导致一个页嵌入．

必要性．因为页嵌入实为外平面图的一种平面嵌入，即得．

若一个图 $G=(V,E)$ 的边集 E 有划分 $E=E_1+\cdots+E_k$ 使得

$$\begin{cases} G=\bigcup\limits_{1\le i\le k} G[E_i]; \\ V=V(G[E_i]), \quad i=1,2,\cdots,k \end{cases} \tag{11.4.1}$$

和所有 $G[E_i], i=1,2,\cdots,k$, 皆页可嵌入的并且 V 中节点在直线上的次序相同，则 (11.4.1) 形式之表示被称为 G 的一个 *页分解*. 将图 G 表示为 $G[E_i], i=1,2,\cdots,k$, 的页嵌入之并使得其节点全在同一条直线上. 也称这种表示为 G 的一个 *书嵌入*. 自然，我们需要在页分解中子图的数目愈小愈好. 在 G 的所有可能的页分解中，最少的子图数被称为 G 的 *页数*. 若一个图的页数为 k, 则称之为 $l(\ge k)$ - *页可嵌入的*.

引理 11.4.3 任何一个图，若它是某 Hamilton 平面图的子图，则它必为 2– 页可嵌入的.

证 设 G 是一个 Hamilton 平面图，C 是其上的 Hamilton 圈. 因为由引理 7.2.2 总有 $G=G_1\cup G_2$ 使得 $G_1\cap G_2=C$ 且 G_1 与 G_2 皆外平面图. 故，从引理 11.4.2 即得引理. □

因为可以证明，若 $G=G_1\cap G_2$ 使得 $G_1\cap G_2=\{v\}$, 则 G 的页数为 G_1 和 G_2 的页数中之最大者. 但，这里 G_1 和 G_2 的页嵌入要保证 v 在直线上为 G_1 的节点中最小者同时为 G_2 的节点中之最大者或反之. 我们在这里被允许只讨论不可分离的图而不失一般性.

定理 11.4.2 一个不可分离的图 G 的页数为 2. 当且仅当 G 是某 Hamilton 平面图的子图并且有一个子图与 K_4 同胚.

证 充分性. 由引理 11.4.3 可知 G 的页数不大于 2. 而

且，由于 K_4 的出现， G 不是外平面图．由定理 11.4.1, G 的页数不小于 2. 充分性得证．

必要性．由于 G 的页数为 2. 可以假设 G 本身就是一个有 2 页的书嵌入．当然， G 是一个 Hamilton 平面图的一个子图．事实上，只要将在直线上的相继而不相邻的二节点连上一条边即得到一个 Hamilton 平面图．因为没有与 K_4 同胚的子图的图本身就是外平面图．由定理 11.4.1, G 必有一个子图与 K_4 同胚．必要性得证． ♮

设 π 为 $\{1,2,\cdots,\nu\}$ $(=V)$ 上的一个置换和图 $G=(V,E)$. 对于 π, V 上的一个线性序由

$$\pi(i) \prec \pi(j) \Longleftrightarrow i < j$$

所确定．如果按照这个线性序， G 可嵌入到 k 页上，则称 G 为 k–页π–可扩张的, $k \geq 1$. 当然，一个图为 k– 页的当且仅当存在 V 上的一个置换 π 使得它是 k 页 π– 可扩张的．

令 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_\varepsilon\}$. 对于每对边 $e_i=(u_i,v_i)$ 和 $e_j=(u_j,v_j)$, 若在 π 的线性序之下：

$$u_i \prec u_j \prec v_i \prec v_j, \tag{11.4.2}$$

则称 e_i 和 e_j 在 $G=(V,E)$ 中是 π–交叉的．我们可以引进一个模 2 变量 x_i 与边 e_i 关联， $1 \leq i \leq \varepsilon$, 并构造一个模 2 方程组：

$$x_i + x_j = \begin{cases} 1, & \text{当 } e_i \text{ 和 } e_j \text{ 为 } \pi-\text{交叉的;} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \tag{11.4.3}$$

其中， $\{i,j\}$ 为对于所有可能的边对 $\{e_i,e_j\}$, $1 \leq i,\ j \leq \varepsilon$, $e_i,e_j \in E$.

定理 11.4.3 对于图 $G=(V,E)$ 的节点集 V 上的一个置换 π, G 为 1- 页 π- 可扩张的当且仅当方程组 (11.4.3) 有一个解使得所有变量不是全取值为 0 就是全取值为 1.

证 在一个 1- 页的 π- 扩张中所有的边对均非 π- 交叉的. 从而，由 (11.4.3) 的定义即可得必要性.

反之，从方程 (11.4.3) 的单值， 0 或 1, 的解也可知，任何一对边均非 π- 交叉的. 从而，可以将节点按 π 所确定的线性序嵌入到 $y=0$ 的直线上而得到 G 的一个一页的嵌入. 这就是充分性. ♮

进而，我们还可以利用方程 (11.4.3) 表征图 G 的 2- 页 π- 可扩张性. 若一个图是 2- 页 π- 可扩张的但不是 1- 页 π- 可扩张的，则称 G 是恰 2- 页π-可扩张的.

定理 11.4.4 对于图 $G=(V,E)$ 的节点集 V 上的一个置换 π, G 是恰 2- 页 π- 可扩张的当且仅当方程 (11.4.3) 有一组非常数的解.

证 因为从 G 的一个 2- 页的 π- 扩张，只要将在一页中的所有边相应的变量全取为 0 而另一页上的所有边的相应变量均取为 1, 可以验证，即得方程 (11.4.3) 的一组解. 必要性显然.

反之，从方程 (11.4.3) 的一组非单值的解出发，我们可以将节点按 π 所确定的线性序嵌入到 $y=0$ 直线上. 然后，将相应变量为 0 的边嵌入到同一页上和将相应变量为 1 的边全嵌入到另一个面上. 这就得到了 G 的一个 2- 页 π 扩张. 充分性得证. ♮

如果图 $G=(V,E)$ 的一个页分解使得其中每个子图全是 1- 页 π- 可扩张的，则称之为 G 的一个 页π-分解. 其中，同上

所述，π 是 V 上的一个置换. 在 G 的所有页 π- 分解中，一个页π–分解 所含子图数目的最小值和最大值分别称它的 页最小数 和 页最大数. 事实上，页最小数就是上面所说的页数.

由方程 (11.4.3), 也可以构造一个所谓 G 的 π–交叉图, 它的节点相应变量，或者 G 的边和二个节点相邻当且仅当它们相应的变量出现在 (11.4.3) 的同一个方程之中. 根据定理 11.4.3-4, 可以利用 π- 交叉图得到如定理 5.4.1 形式的相应定理. 进而，还可以与 §11.3 中相仿地讨论带有一些极性的页分解.

§11.5 纵横分解

设 $\mu(G)$ 是图 $G=(V,E)$ 的一个平面浸入. 如果所有的边在 $\mu(G)$ 中均为只由水平和竖直线段所组成的折线段，则称之为 G 的一个 纵横浸入. 当然，只有那些节点的次不大于 4 的图才有纵横浸入.

引理 11.5.1 *一个图 $G=(V,E)$ 有一个纵横浸入，当且仅当 G 没有一个节点的次大于 4.*

证 因为在任何一个纵横浸入中，每一个节点只能有四个可能的连边方向，必要性显然.

反之，可以从 G 的一个平面浸入得到一个新图的一个平面嵌入. 这个新图 $\tilde{G}$ 为将 G 的浸入中所有两边的交叉点均作为节点而得到. 因为只考虑简单二重交叉 (如 §5.1 中所述), 所有新引进的节点的次均为 4. 故 $\tilde{G}$ 仍满足引理条件. 从而，由定理 8.1.1 即可导出充分性. $\natural$

根据引理 11.1.1, 我们可以称节点次不大于 4 的图为 可纵横的. 那个由 G 的一个纵横浸入通过将交叉点作为新节点所得的可平面图被称为 G 的 关联平面图. 关联平面图的那个由 G

和浸入 $\mu(G)$ 引进交叉点为节点而得到的平面嵌入被称为 $\mu(G)$ 的*平面拓展*.

引理 11.5.2 任何一个可纵横的图均可纵横地划到有两侧的平面上使得所有水平线段在一侧而所有竖直线段在另一侧并且在每边上的折，即水平与竖直线段的公共点处穿一个连两侧的通道 (即孔) 就有任何两条边均除可能的公共端外无其它公共点.

证 由引理 11.5.1, 可以就图的纵横浸入讨论. 事实上，任何纵横浸入均可有如引理中所述的表示. ♮

在引理 11.5.2 中所述的一个图的表示被称为一个*纵横 2-侧嵌入*. 一个有纵横 2- 侧嵌入的图被称为*纵横 2- 侧可嵌入的*. 当然，由上面的二个引理，我们可以看出，一个图是纵横 2- 侧可嵌入的当且仅当它是可纵横的.

若一个图 $G=(V,E)$ 的边集 E 可以划分为 $E_1,E_2,\cdots,E_k$ 使得所有边导出子图 $G[E_1],G[E_2],\cdots,G[E_k]$ 全是纵横 2- 侧可嵌入的，则所有这些子图之并，即 G 本身，被称为 G 的一个*纵横分解*. 在 G 的纵横分解中，称它所含子图的最小数为 G 的*纵横 2- 侧厚度*, 并记为 $t_{r2}(G)$. 容易看出，总有关系：

$$t_{r2}(G)\geq\lceil\Delta(G)/4\rceil=\lambda(G). \tag{11.5.1}$$

其中， $\Delta(G)$ 为 G 中节点次的最大值.

一个图 $G=(V,E)$, 若它的纵横 2- 侧厚度 $t_{r2}(G)=\lambda(G)$. 则称它为*纵横下可嵌入的*. G 的一个纵横分解使得其中子图的数目为 $\lambda(G)$, 则称之为 G 的*纵横下分解*.

为了求一个图 G 的纵横分解尽量接近其纵横下分解，自然会建议我们求*极大*或*最大可纵横的子图*, 即使得不能再加

边同时保证每个节点的次不大于 4, 或者度最大的这种子图.

这里, 我们仅讨论求这种最大子图的问题. 事实上, 可以将它变换为求最大对集的问题.

令 $G=(V,E)$ 是一个图. 当然, 不一定是可平面的. 对于 $v\in V$, 记

$$\begin{cases} P(v)=\{v(e)|\forall e\in E_v\}; \\ Q(v)=\{v_i|i=1,2,3,\cdots,\rho(v)-4\}. \end{cases} \tag{11.5.2}$$

其中, E_v 为与 v 关联的边的集合, $\rho(v)$ 为在 G 中节点 v 的次. 我们构造一个与 G 关联的图 $G'=(V',E')$ 如下:

$$\begin{cases} V'=\sum\limits_{v\in V}\big(P(v)+Q(v)\big); \\ E'=\sum\limits_{(u,v)\in E}E(K_{P(u),P(v)}) \\ \qquad +\sum\limits_{v\in V}E(K_{P(v),Q(v)}), \end{cases} \tag{11.5.3}$$

其中 $K_{X,Y}, X=P(v)$ 或 $P(u)$, $Y=P(v)$ 或 $Q(v)$, 为以 X 和 Y 为二个节点独立集的完全二部图, 并称 G' 为 G 的*扩充*. 为方便, 我们还记

$$\begin{cases} P=\sum\limits_{v\in V}P(v); \\ Q=\sum\limits_{v\in V}Q(v). \end{cases}$$

容易验证, 若 H 是 G 的一个可纵横的子图, 则 H 相应 G' 中的一个使 Q 被饱和的对集.

引理 11.5.3 若 M' 是 G 的扩充 G' 上的一个饱和 Q 的

最大对集，则对于 $v \in V$，在 M' 上将 $P(v)$ 中不与 $Q(v)$ 相邻的所有节点收缩到一个节点所得与 Q 无关的图是 G 的节点次不大于 4 的最大子图.

证 首先，在 M' 上对于 $v \in V$，由收缩 $P(v)$ 中不与 $Q(v)$ 相邻的节点为一个节点和去掉那些与 $Q(v)$ 关联的 M' 中边的二端点得一个图 H. 易验证，$V(H) \subseteq V$ 而且 H 是 G 的一个子图. 然后，由 G' 的构造亦可验证，所有 H 的节点均为次不大于 4 的. 其理由是从 Q 被 M' 所饱和，对任何 $v \in V$，至少在 $P(v)$ 中有与 $Q(v)$ 的节点数相同的节点被 M' 饱和. 最后，证 H 是最大的. 用反证法. 假若 $H_1 \neq H$ 是 G 的一个最大的可纵横的子图. 从 H' 出发我们可以求出一个 G' 中的对集 M_1' 使得同样饱和 Q. 记 H_1 为在 M_1' 上收缩相应的 P 中之节点和去掉与 Q 关联的边之端点所得的图. 同样，H_1 也是 G 的可纵横的子图. 然，这时从 $|E(H_1)| > |E(H)|$ 可得

$$|E(M_1')| - |E(M')| = |E(H_1) - E(H)| > 0.$$

与 M' 是 G' 中一个最大对集矛盾. ♮

至此，也许有人想要知道一个图有 4- 正则支撑子图的条件. 因为它在讨论一个正则图的纵横下可分解性时尤为需要.

定理 11.5.1 一个图 G 有 4- 正则的支撑子图，当且仅当它的扩充 G' 有一个完美对集.

证 与引理 11.5.3 的证明相仿的. 事实上，完美对集本身也是一个最大对集 M'. 不过，这时相应子图 H 是 4- 正则的. 即得定理. ♮

如果在一个图 G 的纵横分解中，所有子图皆可平面的，则称它为 G 的一个 *纵横平面分解*. 当然，一个纵横平面分解

就是这样的一个平面分解使得所有子图均为纵横可嵌入的. 一个图 G 的纵横平面分解中所含子图数的最小值被称为 G 的纵横厚度, 用 $t_r(G)$ 表之. 对此, 我们仍然有

$$t_r(G) \geq \lambda(G). \tag{11.5.4}$$

其中, $\lambda(G)$ 为由 (11.5.1) 所确定的. 显然, 由定义即知, 还有

$$t_r(G) \geq t_{r2}(G). \tag{11.5.5}$$

基于上述和 §11.3 中所讨论的, 可以用二种方式如对于纵横 2- 侧厚度和对于一般厚度所用过的那样讨论纵横厚度.

§11.6 注记

11.6.1 确定一个图的割点或双连通分解的其它准则可以参见 [Shi1]. 在那里, 也许是第一次提供了一个算法. 不管怎样, 这个算法的计算复杂性为 $O(\nu\epsilon)$.

11.6.2 图的 3- 连通分解的想法是由 MacLane 于 1937 年首先提出的 [M1]. 为这种分解设计的第一个线性时间算法出现在 1973 年. 那时, Hopcroft 和 Tarjan 用以作为判定图的平面性的准备步骤 [HoT4].

11.6.3 事实上, 判定一个图的平面性的许多算法或多或少可以作为求一个图的极大平面子图之出发点 [AP1], [Breo], [Da1], [DMP1], [En1], [Fis1], [FiW1], [Go1], [Gs1], [HoT1], [HoT5], [Ht1-2], [JKS1], [Kn3], [LEC1], [Li1], [Ru2-3], [SLY1], [ShiG], [U1], [Wil1], [Wng1] 等. 当然, 为此尚待进一步研究要作那些必要的处理.

11.6.4 关于一些特殊类型图的厚度以及与其它不变量

的关系，可参见 [Ale1], [BeiH1], [BeiH3], [BHM1], [BHY1], [BP1], [Ho1], [HG1-2], [Kle1], [Tut1-2] 等.

11.6.5 关于一般图的平面分解的算法还可参见 [JM1], [MKL1], [STO1-2] 等. 当然，按照定理 11.3.1 的说法，求一个非可平面图的一个最大可平面子图，即使 T- 最大可平面子图都不是容易的.

11.6.6 关于书嵌入的问题与算法可见综述文章 [CLR1]. 一般而言，确定一个图的页数是困难的. 然而，已经知道可平面图的页数至多为 4[Y1]. 如果两页被视为与平面等价，则容易证明任何图均有书上的一个嵌入使得至多有 3 页 [Whe1].

11.6.7 纵横分解的问题来源于超大规模集成电路的设计. 与此有关的许多问题的模型和解法可参见 [Ab1], [AKH1], [BTT1], [Be1], BeH1], [BrM1], [CKC1], [CIF1], [Cle1], [CleL1], [CoH1], [CWL1], [DuZ1], [En2], [EM1], [FCW1], [Fle1], [FrJ1], [GH1], [GL1], [GM1], [GZ1], [GK1], [KR1], [Kau1], [Kod1-2], [LLP1], [Ow1], [RiM1], [Ro1], [RT1], [SL1], [ScK1], [Ta1], [Th2], [TKS1-2], [V1], [VaO1], [Wo1], [YYL1], [YoN1] 等.

11.6.8 本章的主要结果是从平面性辅助图出发而得到的. 这类图似第一次在 1978 年出现 [Liu1]. 之后，在 [Liu19], [Liu23-24] 中得到了发展. 同时，在 [FR1-2], [Liu22], [Ro3], [Sun1-2], [Xu1] 等中也可以见到. 定理 11.3.1 的原始说法在 [Liu25] 中.

11.6.9 与图的分解有关的新进展还可参见 [Liu29]. 在纵横嵌入方面可参见 [Liu27-28], [CuL1]. [LMP1], [LMPS1-2], [LMS1-6], [Liu30] 等.

第十二章

曲面可嵌入性

§12.1 必要条件

在 §2.1-2 节中，曾提到图的曲面嵌入并且通过图 G 的码论在曲面 (可定向与不可定向的) 上嵌入之存在性. 在这一节，打算更一般地讨论一个图的曲面嵌入的性质.

首先，我们指出不是说任何一个图均可以嵌入到任何给定亏格 (可定向与不可定向) 的曲面上.

引理 12.1.1 对于一个图 $G=(V,E)$(当然，简单而且连通的)，令 $G(\Sigma)$ 为 G 在一个曲面 S(可定向与不可定向) 上的一个嵌入. 或简记 $G(\Sigma)\subset S$. 则，有

$$\nu-\varepsilon+1\leq\chi(S)\leq\nu-\left\lceil\frac{\varepsilon}{3}\right\rceil. \tag{12.1.1}$$

其中，$\chi(S)$ 为曲面 S 的 Euler 示性数.

证 因为 $G(\Sigma)$ 有至少 1 个面，由 (1.5.6) 可得 (12.1.1) 中 $\chi(S)$ 的下界. 另一方面，由 G 的简单性和连通性可知 $3\varphi\leq 2\varepsilon$ 总成立. 从而，$G(\Sigma)$ 至多有 $\left\lfloor\frac{2\varepsilon}{3}\right\rfloor$ 个面. 由 (1.5.6)，又有

$$\chi(S) \le \nu - \varepsilon + \left\lfloor \frac{2\varepsilon}{3} \right\rfloor = \nu - \left\lceil \frac{\varepsilon}{3} \right\rceil.$$

这就是 (12.1.1) 中 $\chi(S)$ 的上界. □

由这个引理和 (1.5.7), 我们即可得到下面的一些推论.

推论 12.1.1 $\forall G \in \mathcal{G}$,

$$G(\Sigma) \subset P_p \Longrightarrow \left\lceil \frac{\beta(G)+1}{2} - \frac{\varepsilon}{3} \right\rceil \le p \le \left\lfloor \frac{\beta(G)}{2} \right\rfloor. \tag{12.1.2}$$

推论 12.1.2 $\forall G \in \mathcal{G}$,

$$G(\Sigma) \subset Q_q \Longrightarrow \beta(G) + 1 - \left\lfloor \frac{2\varepsilon}{3} \right\rfloor \le q \le \beta(G). \tag{12.1.3}$$

如果一个图可以嵌入到 Euler 示性数为 (12.1.1) 所示的下或上界的曲面上, 由分别称它们为*下可嵌入的*或*上可嵌入的*. 在 §12.2 和 §12.4 中, 我们将专门讨论上可嵌入性和下可嵌入性.

对于图 G 的一个嵌入 $G(\Sigma)$, 我们引进二类运算以便将在一个曲面上的嵌入 $G(\Sigma)$ 变换到在另一个亏格与之不同的曲面上的嵌入 $G(\Sigma')$.

设 $G(\Sigma)$ 是在可定向曲面 S 上的一个嵌入, $e = (u, v)$ 是面 f_1 和 f_2 的公共边界上的一条边. 其中, f_1 和 f_2 没有一个的边界覆盖另一个的边界的情形. 不失一般性, 可以与以前一样假设 u 和 v 的次均不小于 3. 记

$$f_1 = eR; \qquad f_2 = e^{-1}L; \qquad f_3 = bDa. \tag{12.1.4}$$

其中, a, b 和 e 具有公共端 v. 令在 v 处的旋为 $eAabB$. 其中, A 或 B 允许为空集, 即 A 或 $B = \emptyset$. 则, 只将 v 处旋从 $eAabB$

改变为 $AaebB$ 的运算被称为在 $G(\Sigma)$ 上对边 e 作一次 手柄.

引理 12.1.2 在 $G(\Sigma) \subset S \in \boldsymbol{P}$ 作一次手柄将 $G(\Sigma)$ 变换为 $G(\Sigma') \subset S' \in \boldsymbol{P}$ 使得 S' 的亏格比 S 的亏格大 1.

证 因为容易验证 $G(\Sigma)$ 和 $G(\Sigma')$ 的面集之间所不同的只是将 $G(\Sigma)$ 中的三个面 f_1, f_2, 和 f_3, 如 (12,1,4) 所示，用如下的一个面 f' 所代替：

$$f' = ebDae^{-1}LR. \tag{12.1.5}$$

同时，也易验证，曲面的可定性不变. 从而，由 Eulre 公式 (1.5.7) 即得引理. ♮

设 $G(\Sigma)$ 为 G 在不可定向曲面上的一个嵌入. 若 e 是面 f_1 和 f_2 的公共边界上的一条边，记

$$f_1 = eR; \qquad f_2 = e^{-1}T, \tag{12.1.6}$$

则，在 $G(\Sigma)$ 上变换如 (12.1.6) 所示的二面成为一个面

$$f' = e\ Re\ T^{-1} \tag{12.1.7}$$

的运算被称为在 $G(\Sigma)$ 上对边 e 作一次 叉帽.

引理 12.1.3 在 $G(\Sigma) \subset S \in \boldsymbol{Q}$ 上作一次叉帽将 $G(\Sigma)$ 变换为 $G(\Sigma') \subset S' \in \boldsymbol{Q}$ 使得不可定向性不变且 S' 的不可定向亏格比 S 的大 1.

证 由 S 的不可定向性，容易验证 S' 也是不可定向的. 而且， $G(\Sigma')$ 是 S' 上的一个嵌入. 因为 $G(\Sigma)$ 与 $G(\Sigma')$ 之间的不同仅在于在 $G(\Sigma')$ 中的面数比在 $G(\Sigma)$ 中的少 1. 从而，由 Euler 公式 (1.5.7) 即得引理. ♮

若一个图 G 可以嵌入亏格为 $g(S)$ ($p(S)$ 或 $q(S)$) 的曲面 S(可定向或不可定向) 上，但不能嵌入到亏格 $g(S')$($p(S')$ 或 $q(S')$) 大于 $g(S)$($p(S)$ 或 $q(S)$) 的任何曲面 S'(可定向或不可定向) 上，则称 $g(S)$($p(S)$ 或 $q(S)$) 为 G 在曲面 (可定向或不可定向) 上的 *最大亏格*. 常直接称 *最大可定向亏格* 或 *最大不可定向亏格*, 分别用 $p_M(G)$ 或 $q_M(G)$ 表示.

相反地，若一个亏格为 $g(S)$ ($p(S)$ 或 $q(S)$) 的曲面 S, 图 G 可以嵌入在其上但任何亏格 $g(S')$ ($p(S')$ 或 $q(S')$) 小于 $g(S)$ ($p(S)$ 或 $q(S)$) 的曲面 S' (可定向或不可定向), 均不能嵌入在其上, 则称亏格 $g(S)$ ($p(S)$ 或 $q(S)$) 为 G 在曲面 (可定向或不可定向) 上的 *最小亏格*. 亦常直接称 *最小可定向亏格* 或 *最小不可定向亏格*, 分别用 $p_L(G)$ 或 $q_L(G)$ 表示. 图 G 的最小亏格 (可定向或不可定向) 在文献中也称为 G 的 *亏格*(可定向或不可定向).

引理 12.1.4 *一个图 G 可嵌入的曲面的亏格* (可定向或不可定向) *是它的最大亏格当且仅当在 S 上不存在这样的一个嵌入使得上述二运算*(手柄或叉帽)*可以在这个嵌入上进行.*

证 因为若 G 可嵌入到 S 上使得可进行这二运算 (手柄或叉帽), 则由引理 12.1.2-3 可知 S 的亏格不可能是 G 的最大亏格 (可定向或不可定向). 必要性得证.

反之，要讨论如下两种情形.

情形 1 设曲面是可定向的. 用反证法. 设 $G(\Sigma')$ 为曲面 S' 上的一个嵌入，且其亏格 $p(S')$ 大于 S 的亏格 $p(S)$. 由引理 12.1.1, 可以假设 $p(S')=p(S)+1$ 而不失一般性. 而且，通过观察可知，在 S' 上的任一嵌入都有如 (12.1.4) 和 (12.1.5) 所示之结构之一. 然而，因为 $G(\Sigma')$ 至少有一个面具有 (12.1.5) 的形式 (否则， $G(\Sigma')$ 的面数将大于 $G(\Sigma)$ 的面数. 这就与 $p(S')>p(S)$

矛盾). 这就由引理 12.1.2 允许在 $G(\Sigma)$ 上作手柄之逆运算而得到 S 上的一个嵌入. 从而, 在 S 上有一个嵌入使得可以作一次手柄. 与给定的条件矛盾.

情形 2 设曲面是不可定向的. 因为在曲面上嵌入的条件意味这些嵌入全都没有一边在两个面的公共边界上. 由此可知, 它们全只有一个面. 根据引理 12.1.1, 可知它们全在不可定向曲面上并使得其亏格为最大.

综上二情形, 引理得证. ▮

由引理 12.1.4 证明中的情形 2, 我们还知道所有图对于不可定向的情况皆上可嵌入的只要将亏格为 0 的曲面同时视为可定向与不可定向 (特殊情形). 这又得到了定理 2.2.4.

为方便, 对于一个图 G, 记

$$g_M(G) = \begin{cases} p_M(G), \text{ 当可定向时;} \\ q_M(G), \text{ 当不可定向时} \end{cases} \tag{12.1.8}$$

和

$$g_L(G) = \begin{cases} p_L(G), \text{ 当可定向时;} \\ q_L(G), \text{ 当不可定向时.} \end{cases} \tag{12.1.9}$$

若图 G 的一个嵌入是在亏格为 $g_M(G)$(或 $g_L(G)$) 的曲面上, 则称它为 G 的 *最大*(或 *最小*) *亏格嵌入*, 或更准确地, 对于可定向和不可定向情形分别称之为 G 的 *最大可定向*(或 *最小可定向*) *亏格嵌入* 和 *最大不可定向*(或 *最小不可定向*) *亏格嵌入*. 从 Euler 公式, 最大 (或最小) 亏格嵌入也可称为 *最小*(或 *最大*) *面嵌入*.

定理 12.1.1 对于一个图 G 和一个整数 $kg_L(G) \leq k \leq$

$g_M(G)$, 存在亏格为 k 的曲面 S(可定向或不可定向) 上的一个嵌入 $G(\Sigma)$ 和对于 G 在曲面 S 上的任何嵌入 $G(\Sigma)$, 存在 G 的一个最小 (或最大) 亏格嵌入 $G(\Sigma_1)$ 使得从 $G(\Sigma_1)$ 出发可以通过作 $k-g_L(G)+1$ $(g_M(G)-k)$ 次运算 (手柄或叉帽) 而得到 $G(\Sigma)$.

证 因为对任一图 G, 总有一个最小 (或最大) 亏格嵌入 $G(\Sigma_1)$. 由引理 12.1.2-4, 从 $G(\Sigma_1)$ 出发经过作 $k-g_L(G)+1$ $(g_M(G)-k)$ 次运算 (手柄或叉帽) 即可得 G 在亏格为 k 的曲面 S(可定向或不可定向) 上的一个嵌入 $G(\Sigma)$. 定理的前一个结论得证.

进而, 对于亏格为 k 的曲面 S(可定向或不可定向) 上的一个给定的嵌入 $G(\Sigma)$, 由引理 12.1.2-4, 也可以从 $G(\Sigma)$ 出发通过作 $k-g_L(G)+1$ $(g_M(G)-k)$ 次运算 (手柄之逆或叉帽之逆) 求得图 G 的一个最小 (或最大) 亏格嵌入 $G(\Sigma_1)$. 则, 用前一结论证明中的方法即可得定理的后一个结论. □

根据这个定理, 可以看出图 G 可嵌入的曲面亏格的集合为由所有整数组成的全序集中的一段. 对于可定向和不可定向情形, 这个段被分别称为 G 的 *手柄段* 和 *叉帽段*, 统称二者为 G 的 *亏格段*. 从而, 手柄段和叉帽段也分别称为 *可定向亏格段* 和 *不可定向亏格段*. 手柄段和叉帽段的基数分别称为 *手柄数* 和 *叉帽数*. 当然, 这两种数均为图的组合不变量.

§12.2 上可嵌入性

因为对于不可定向曲面, 一个图 G 的上可嵌入性已经由定理 2.2.4 解决. 在这一节, 我们只集中讨论可定向的情形. 如果图 $G=(V,E)$ 的一个在曲面上的嵌入有一或二个面, 则分别称它为 G 的一个 *单* 或 *二面嵌入*.

引理 12.2.1 一个图 G 是上可嵌入的，当且仅当 G 有一个单面嵌入，若曲面是不可定向的；根据 Betti 数 $\beta(G)$ 为 0 或 1 (mod 2), 分别有单或二面嵌入，若曲面为可定向的.

证 为对于一般多面形的 Euler 公式 (1.5.7) 的一个直接结果. ◻

事实上，定理 2.2.4 表明任何一个图在不可定向曲面上均有一个单面嵌入. 然而，对于一个图在可定向曲面上的单或二面可嵌入性则远非如此. 在可定向曲面上，既无单面也无二面嵌入的图之最简单的情形如图 12.2.1 所示. 若否，由引理 12.2.1, 这个图只可能在环面上有一个二面嵌入. 不管怎样，通过考虑所有可能之情形可知这是不可能的.

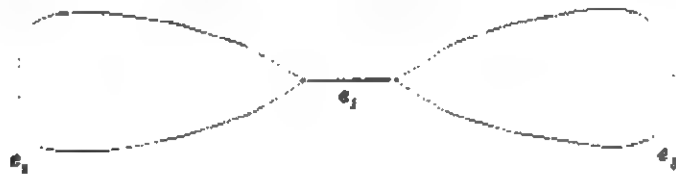


图 12.2.1

对于图 $G=(V,E)$ 的一个支撑树 T, 如果 a 和 b 是两个相邻的上树边，则称图 $G'=G-\{a,b\}$ 为 G 的一个 简单 T- 约化图, 也可以说 G 为 简单 T- 可约化到G'.

引理 12.2.2 令 G' 为图 $G=(V,E)$ 的一个简单 T- 约化图. 则，只要 G' 有一个单面嵌入， G 就有一个单面嵌入.

证 设 $G'=G-\{a,b\}$. 其中， $a=(u,v)$ 和 $b=(v,w)$ 为对 T 的两条相邻的上树边. 令 $\mu(G')$ 为 G' 的一个单面嵌入和记

$$\mu(G')=(RSX). \tag{12.2.1}$$

其中，u, v 和 w 以如下形式中的次序出现

$$RvSwXu. \tag{12.2.2}$$

自然，这是不失一般性的．则，可以将 $\mu(G')$ 延拓为一个二面嵌入 $\mu(\bar{G})$ 如下：

$$\mu(\bar{G}) = (Ra, a^{-1}SX). \tag{12.2.3}$$

其中，$\bar{G} = G' + a$．由 (12.2.3)，$\mu(\bar{G})$ 又可以延拓为 $G = \bar{G} + b$ 的一个单面嵌入

$$\mu(G) = (Rb\ Xa\ Sb^{-1}a^{-1}). \tag{12.2.4}$$

容易看出，$\mu(G)$ 是可定向的．因此，G 与 G' 一样也有一个单面嵌入． ▯

这个引理使我们可以引进一种运算，称为*单柄加*，即在 G 的一个选定的支撑树 T 的基础上将形式 (12.2.2) 变到 (12.2.4) 之运算．

对于图 G 的一个支撑树 T，将 T 视为在球面上的一个嵌入．若在 T 的基础上通过作一系列的单柄加得到 G 的一个单面嵌入 $\mu(G)$，则称 G 是*单面 T- 可扩张的*

引理 12.2.3 *对于图 $G=(V,E)$ 的一个支撑树 T，G 是单面 T- 可扩张的当且仅当其上树边的集合可以划分为相邻的边对．*

证 由 Euler 公式，要在 G 上作 $\dfrac{\beta(G)}{2}$ 次单柄加才能得到 G 的一个单面嵌入．且，每次运算取二个相邻的上树边．从而，可得上树边集的相邻边对划分．这就有必要性．

反之，由上树边集的相邻边对之划分，可以在 T 作为球

面嵌入的基础上，逐个对边的相邻对作单柄加．最后，即可得 G 在亏格为 $\frac{\beta(G)}{2}$ 的曲面上的一个单面嵌入．从而，必要性得证． ♮

如果 $\beta(G)=1 \pmod 2$, 由引理 12.2.1 知 G 不会有单面嵌入．对于 G 的一个单圈支撑子图，用 $T+e$ 表示．其中，T 为 G 的一个支撑树和 e 为一个上树边．这时总能将 $T+e$ 嵌入到球面上使得有两个面．在 G 的一个嵌入中，那个由 $T+e$ 中圈为边界的面被称为*固定面*. 而其它的面均称为*活动面*. 对于一个相邻的上树边对 $\{a,b\}$, a 和 b 均非 e, 图 $G'=G-\{a,b\}$ 被称为 G 的 *简单$(T+e)$-约化图* 和 G 被称为 *简单$(T+e)$-可约化到G'*.

引理 12.2.4 令 G' 为 $G=(V,E)$ 的一个简单 $(T+e)$- 约化图．则，只要 G' 有一个二面嵌入 G 就有一个二面嵌入．

证 对于 G' 的二面嵌入中的活动面，利用与引理 12.2.2 的证明中相仿的过程，也可得此引理． ♮

对于 G 的一个单圈支撑子图 $T+e$, 若 G 的一个二面嵌入可以在 $T+e$ 作为球面上的二面嵌入之基础上对于活动面作一系列的单柄加而得到，则称 G 是 *二面$(T+e)$-可扩张的*.

引理 12.2.5 对于 $G=(V,E)$ 的一个单圈支撑子图 $T+e$, G 是二面 $(T+e)$- 可扩张的，当且仅当除 e 外的所有上树边的集合可以分划为相邻边对．

证 因为 G 是二面 $(T+e)$- 可扩张的．由 Euler 公式，G 的一个二面嵌入可以在 $T+e$ 的球面上的二面嵌入的基础上通过作 $\frac{\beta(G)-1}{2}$ 次单柄加而得到．因为每作一次单柄加用到 G 的一对不含 e 的相邻上树边，从而，将除 e 外 G 的所有上树边

划分为 $\frac{\beta(G)-1}{2}$ 个相邻对．这就得到了必要性．

反之，由那个相邻边对的划分，可以在 $T+e$ 作为球面上的一个二面嵌入的基础上，逐对作单柄加．最后，即可得 G 的一个在亏格为 $\frac{\beta(G)-1}{2}$ 的曲面上的一个二面嵌入．从而，充分性得证． ▯

对于图 $G=(V,E)$ 在一个可定向曲面上的一个嵌入 $\mu(G)$，若两条边 $a=(u,v)$ 和 $b=(v.w)$ 在同一个面的边界按以下次序出现：

$$RaSbXa^{-1}Yb^{-1}, \tag{12.2.5}$$

由在 G 上去掉此二边并将 (12.2.5) 之形式变为

$$RYXS \tag{12.2.6}$$

之运算被称为在 $\mu(G)$ 上作一次*单柄减*．因为容易看出，在 $\mu(G)$ 上作一次单柄减所得的图实际上是图 $G'=G-\{a,b\}$ 在亏格比 $\mu(G)$ 所在的可定向曲面的亏格小 1 的可定向曲面上的一个嵌入 $\mu(G')$．这时， $\mu(G')$ 被称为 $\mu(G)$ 的一个*简单约化嵌入*，或者说 G' 是 G 的一个*简单约化图*．

一个可以通过在 $\mu(G)$ 上作一系列的单柄减而得到的嵌入被称为 $\mu(G)$ 的*约化嵌入*．如果 $\mu(G)$ 的一个约化嵌入不再进一步简单地被约化，则称它为 G 的*一个极小约化嵌入*．

引理 12.2.6　*一个图 G 的一个单面嵌入的所有极小约化嵌入皆球面上的树．*

证　若 G 本身不是树，由 G 的单面可嵌入性，$\beta(G)=0$ (mod 2)．则， G 至少有二条上树边．由 G 的连通性， G 至少有一个节的次不小于 3．进而，由单面可嵌入性和 G 不是树， $\mu(G)$ 有一个节点的次不小于 3 并且有二条边 a 和 b 在形

式 (12.2.5) 中. 对 a 和 b 作一次单柄减, 得 $\mu(G')$, $G' = G-\{a,b\}$, 仍为可定向曲面上的一个单面嵌入. 若 G' 仍非树, 可继续作单柄减. 由 G 之 YA 的有限性, 最终 NT 得到一个树不再可简单地被约化. ♮

引理 12.2.7 一个图 G 的一个二面嵌入 $\mu(G)$ 的极小约化嵌入全是球面上的单圈图.

证 设 G 本身不是一个单圈图. 由二面可嵌入性, G 至少有三条上树边. 进而, 由 G 的连通性和非单圈性, $\mu(G)$ 必有一个面, 它的边界如形式 (12.2.5) 表示使得 a 和 b 是相邻的. 从而, 可以在 $\mu(G)$ 上作一次单柄减得到 $\mu(G')$, $G' = G-\{a,b\}$, 仍为可定向曲面上的一个二面嵌入. 用与引理 12.2.6 的证明相仿的过程, 即可导出此引理. ♮

基于上面的引理, 我们可以提供一个图的在可定向曲面上的上可嵌入性, 或者说单面与二面可嵌入性之表征.

定理 12.2.1 对于连通图 $G=(V,E)$, T_1 面的三个说法是等价的:

(1) G 在可定向曲面上是上可嵌入的, 或者由引理 12.2.1, G 在可定向曲面上有一个单面或二面嵌入;

(2) 在 G 上有一个支撑树 T 使得 G 是可约化到 T 或 $T+e$ 的. 其中, e 为 E 中对 T 的某上树边.

(3) 在 G 上有一个支撑 T 使得其上树至多有一个奇度的连通片.

证 (1) $\Longrightarrow$ (2). 引理 12.2.6-7 的一个直接结果. (2) $\Longrightarrow$ (3). 由 (2), 所有上树边 (或只有 e 例外) 的集合可以划分为相邻边对. 从而, 上树的连通片 (或仅除 e 所在的片为奇度的外) 全是偶度的. 这就得到了 (3). 最后, 由引理 12.2.4-5, (3) $\Longrightarrow$ (1)

即可得到. ♮

从上述结果，我们自然要引进一个拓扑不变量，并称之为图 G 的 亏数, 即

$$\xi(G) = \min_{T\in\mathcal{T}} \xi(G;T). \quad (12.2.7)$$

其中， $\xi(G;T)$ 为上树 T 的奇度连通片数和 $\mathcal{T}$ 为 G 的所有支撑树的集合. 由定理 12.2.1, 即可得如下推论.

推论 12.2.1 一个连通图是上可嵌入的, 当且仅当 $\xi(G) \leq 1$. ♮

进而, 利用上述相仿的方法, 我们还可发现图的最大亏格与图的亏数之间的关系.

推论 12.2.2 对于连通图 $G = (V, E)$, 有

$$g_M(G) = \frac{\beta(G) - \xi(G)}{2}. \quad (12.2.8)$$

通过在图中找到一个支撑树使得其上树是连通的，我们即可发现所有诸如 n 阶完全图 $K_n, n \geq 2$; 完全 l 一部图 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_l}$, $l \geq 2, n_1, n_2, \cdots, n_l \geq 1$; n- 立方体图 Q_n, $n \geq 2$, 甚至 4- 边连通图等在可定向曲面上皆上可嵌入的.

这里的全部讨论均可应用到不可定向的情形. 对此，我们只需研究图的单面嵌入就足以确定其上可嵌入性.

§12.3 商嵌入

令图 $G = (V, E)$ 和 $Aut(G)$ 为 G 的自同构群. 设 Λ 为 $Aut(G)$ 的一个非平凡的子群. 则，我们可以构造另一个图，称为 G 的 商图, 并用 G/Λ 表示如下

$$G/\Lambda = (V/\Lambda, E/\Lambda). \quad (12.3.1)$$

其中，V/Λ 和 E/Λ 分别有形式

$$\begin{cases} V/\Lambda = \{V_\Lambda(v) | \forall v \in V\}; \\ E/\Lambda = \{E_\Lambda(b) | \forall b \in E\}. \end{cases}$$

而且，$V_\Lambda(v)$ 与 $E_\Lambda(b)$ 分别为在 Λ 作用下 $v \in V$ 与 $b \in E$ 的轨道，即

$$\begin{cases} V_\Lambda(v) = \{u | \forall u \in V,\ \exists \lambda \in \Lambda \ni u = \lambda v\}; \\ E_\Lambda(b) = \{e | \forall e \in E,\ \exists \lambda \in \Lambda \ni\ e = \lambda b\}. \end{cases}$$

在图 12.3.1 中，(a) 所示的就是 (b) 所示的图对于 $\Lambda = \{1, (123)(456), (132)(465)\}$ 的商图. 当然，Λ 是一个 3 阶的循环群. 在如图 12.3.1(a) 所示的 G/Λ 中，

$$e_1 = \{(1,5), (2,6), (3,4)\};$$

$$e_2 = \{(1,4), (2,5), (3,6)\};$$

$$e_3 = \{(1,6), (2,4), (3,5)\};$$

$$e_4 = \{(4,5), (5,6), (6,4)\}.$$

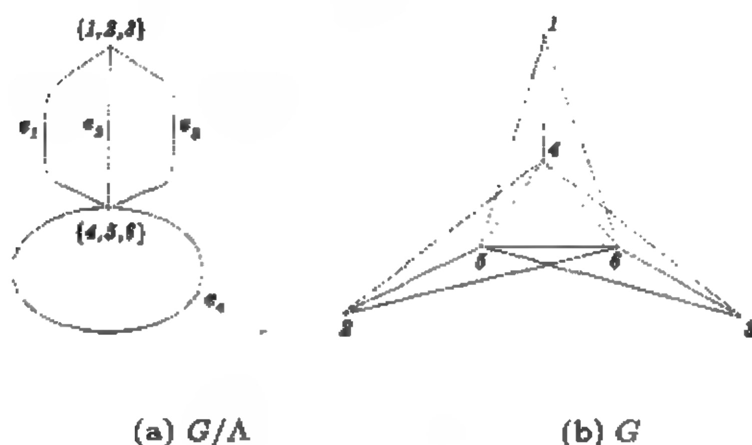
对于 $G = (V, E)$ 的节点集 V 上的一个群 Γ, 若没有 $v \in V$ 使得 $\exists \gamma \in \Gamma - \{1\}$, $\gamma v = v$ 而且也没有 $e \in E$ 使得 $\exists \gamma \in \Gamma - \{1\}$, $\gamma e = e$. 则，Γ 被称为 自 由 地 作用在 V 上. 在图 12.3.1 的例子中，Λ 为自由地作用在 V 上. 若一个函数 $quot_\Lambda$: $G \to G/_\Lambda$ 使得

$$\begin{cases} \forall v \in V, \quad quot_\Lambda(v) = V_\Lambda(v); \\ \forall e \in E, \quad quot_\Lambda(e) = E_\Lambda(v), \end{cases} \tag{12.3.2}$$

则，称之为对 Λ 的 **商映象**. 对于二个图 $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E})$ 和 $G(V,E)$, 若一个映象 $cop:\tilde{G}\to G$ 与对于一个群 Λ 的商映象等价，则称 cop 为一个 **覆盖投影** 和 $\tilde{G}$ 为 G 的 **覆盖图**, 或 **覆盖空间**. 同时， G 被称为 $\tilde{G}$ 的 **基础图**. 事实上，我们有如下的形式为可交换的：

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow{cop} & G \\ quot_{\Lambda}\uparrow & & \uparrow is0 \\ \tilde{G}/\Lambda & = & \tilde{G}/\Lambda \end{array}$$

其中， iso 表示一个同构.



(a) G/Λ　　(b) G

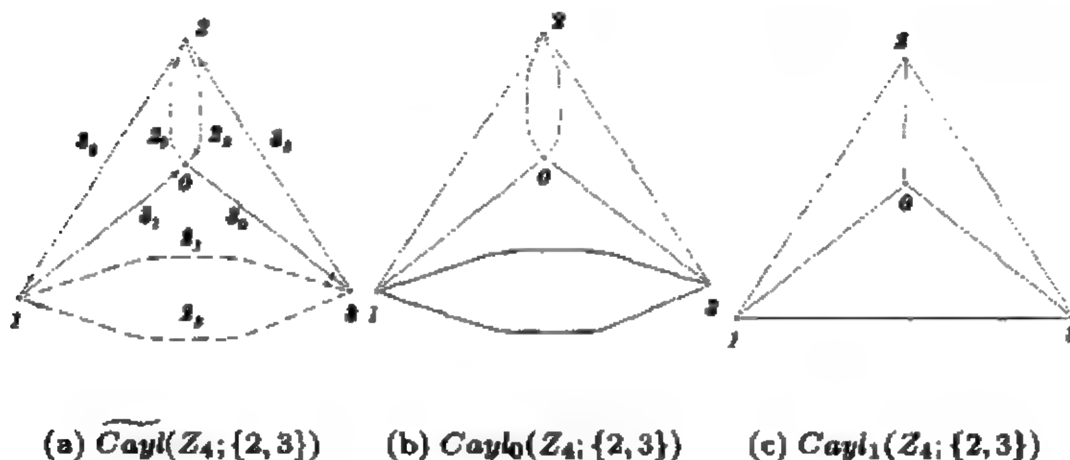
图 12.3.1

令 Γ 是一个非平凡的群，即 $\Gamma\neq 1$. $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为 Γ 的所有生成元的集合. 所谓对于 Γ 和 X 的 $Cayley$色图, 用 $\widetilde{Cayl}\,(\Gamma;X)=(\tilde{V}(\Gamma,x),\,\tilde{E}(\Gamma;X))$ 表示，即这样一个在边上带色的图使得

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{V}(\Gamma;X)=\Gamma; \\ \tilde{E}(\Gamma;X)=\{\prec\alpha,\alpha x\succ\,|\forall\alpha\in\Gamma,\ \forall x\in X\}. \end{array}\right. \tag{12.3.3}$$

其中， x 表示边 $\prec\alpha,\alpha x\succ$ 的色. 通常用 x_α 表示边 $\prec\alpha,\alpha x\succ$.

如果在 Cayley 色图中不考虑边的方向和色，则称之为 *第 0 类 Cayley 图*. 用 $Cayl_0(\Gamma;X)$ 表示. 进而，如果在 X 中有一个二阶的生成元 x, 则对于所有二阶生成元 x, 把 x_α 和 $x_{\alpha x}$ 合而为一. 这样所得的称为 *第 1 类 Cayley 图*. 用 $Cayl_1(\Gamma;X)$ 表之. 并且，将 $Cayl_0(\Gamma;X)$ 和 $Cayl_1(\Gamma;X)$ 统称为 *Cayley 图*. 在图 12.3.2 中， (a), (b) 和 (c) 分别表示 Cayley 色图，第 0 类 Cayley 图和第 1 类 Cayley 图. 其中，这个群 Γ 为 4 阶循环群 $Z_4=\{0,1,2,3\}$, 生成元的集合 $X=\{2,3\}$.



(a) $\widetilde{Cayl}(Z_4;\{2,3\})$ (b) $Cayl_0(Z_4;\{2,3\})$ (c) $Cayl_1(Z_4;\{2,3\})$

图 12.3.2

可以验证， $\widetilde{Cayl}(\Gamma X)$ 和 $Cayl_0(\Gamma;X)$ 皆 $2n$- 正则的，而 $Cayl_1(\Gamma;X)$ 则是 $(2n-k)$- 正则的，其中， k 为 X 中二阶生成元的数目和 $|X|=n$. 进而，还可看出 $Cayl_0(\Gamma;X)$ 具有一类总体对称性： $\forall u,v\in V(\Gamma;X)$,

$$\exists\alpha\in Aut(Cayl_0(\Gamma;X))\ni u=\alpha v.$$

并称之为 *节点可迁性*.

引理 12.3.1 令 Γ 为一群， X 为其生成元的集合. 且 $\Lambda\subseteq \mathrm{Aut}\ (Cayl_0(\Gamma;X))$ 与 Γ 的一个子群同构. 则， Λ 自由地作

用在 Cayley 图 $Cayl_0(\Gamma;X)$ 上.

证 设 τ: $\Lambda\to\Gamma$ 是一个双射. 令 $\alpha_a\in\Lambda$ 为一个自同构且使得 $\tau(\alpha_a)=a\in\Gamma$. 则，可以看出：

$$\forall v\in V_0(\Gamma;X),\qquad \alpha_a v=av \tag{12.3.4}$$

和 $av=v$ 当且仅当 $a=1$, 即 Γ 中之幺元；

$$\forall x_v\in E_0(\Gamma;X),\qquad \alpha_a x_v=x_{av} \tag{12.3.5}$$

和 $x_{av}=x_v$ 当且仅当 $a=1$. 其中， $x\in X$. $V_0(\Gamma;X)$ 和 $E_0(\Gamma;X)$ 分别为 $Cayl_0(\Gamma;X)$ 的节点集和边集. 由此，即得引理. ▯

对于一个多面形 $\Sigma=\Sigma(V,E,F)$, 或记为 $\Sigma(G)=(F)$. 其中， $G=(V,E)$. V,E 和 F 分别为 Σ 的节点集，边集和面集. 如果 Λ 是 Aut (Σ) 的一个子群， Aut (Σ) 为 Σ 的自同构群，则 Σ 对于 Λ 的 *商多面形*, 用 Σ/Λ 表示，被定义为

$$\Sigma/\Lambda=(V/\Lambda,E/\Lambda,F/\Lambda). \tag{12.3.6}$$

其中， V/Λ 和 E/Λ 如 (12.3.1) 中所确定而且

$$\begin{cases} F/\Lambda=\{F_\Lambda(h)|\forall h\in F\};\\ F_\Lambda(h)=\{f|\forall f\in F,\exists\lambda\in\Lambda\ni f=\lambda h\}. \end{cases}$$

进而，对于一个图 $G=(V,E)$ 在曲面上的嵌入 $\mu(G)$, 我们还可以定义 *商嵌入*, 用 $\mu(G)/\Lambda$ 表示，其中 $\Lambda\subseteq$ Aut (μG), 如下：

$$\mu(G)/\Lambda=(G/\Lambda,F/\Lambda). \tag{12.3.7}$$

其中， F 为 $\mu(G)$ 的面集. 例如，若将图 12.3.1(b) 给出的图 G

的嵌入取为

$$\begin{aligned}\mu(G) &= \Sigma(G) \\ &= (abc, b^{-1}gh^{-1}fe^{-1}kl^{-1}a^{-1}ed^{-1} \\ &\qquad lj^{-1}hi^{-1}c^{-1}jk^{-1}ig^{-1}df^{-1}) \\ &\subset P_3.\end{aligned}$$

其中， $a = (5,4)$, $b = (4,6)$, $c = (6,5)$, $d = (1,4)$, $e = (5,1)$, $f = (6,1)$, $g = (4,3)$, $h = (3,6)$, $i = (5,3)$, $j = (6,2)$, $k = (5,2)$, $l = (4,2)$. 则， G 对于那里的 Λ 之商嵌入为

$$\mu(G)/\Lambda = \Sigma(G/\Lambda) = (A, A^{-1}BC^{-1}DB^{-1}CD^{-1}) \subset P_1.$$

其中， $A = \{a,b,c\}$, $B = \{j,e,g\}$, $C = \{k,d,h\}$, $D = \{l,f,i\}$. 这就为我们提供了求一个图的嵌入对于一个群 Λ 的商嵌入的一种简单过程.

然而，对于我们更为重要的则是其逆问题，即从对于某群 Λ 的商图 G/Λ 的一个嵌入求图 G 的一个嵌入.

所谓 *群权图*, 用 $G(\Gamma) = (V,E;\Gamma)$ 表示，即指这样的一个有向图 $G = (V,E)$ 使得它的边用一个群 Γ 中的一个元素作为权. 当然，如果一条边的权为 $a \in \Gamma$, 则此边的逆方向就有权 a^{-1}, 即 a 在 Γ 中之逆. 这里， Γ 被称为 $G(\Gamma)$ 的 *权群*. 图 $\hat{G} = (V \times \Gamma, E \times \Gamma)$ 被称为 G 对于 Γ 的 (右)*扩充图*. 如果群中元素作为权分配到 $G = (V,E)$ 上，则对于任何 $v \in V$,

$$\hat{v} = \{v_a | \forall a \in \Gamma\} \in \hat{V},$$

$\hat{V} = V \times \Gamma$ 为扩充图 $\hat{G}$ 的节点集，被称为 v 上的 *纤维*. 相仿

地，对于 $e=(u,v)\in E$,

$$\hat{e}=\{e_a|\forall a\in\Gamma, e_a=(u_a,v_{ab})\},$$

其中 b 为 e 上的权，被称为 e 上的 纤维. 将 $v\in V$ 上的纤维中的节点映到 v 同时将 $e\in E$ 上纤维中的边映到 e 的映象 $nalp:\hat{G}\to G$ 称为 自然投影. 一个径

$$W=e_1^{\delta_1}e_2^{\delta_2}\cdots e_s^{\delta-s} \tag{12.3.8}$$

的 网权 被定义为其上边的权的积

$$a(e_1^{\delta_1})a(e_2^{\delta_2})\cdots a(e_s^{\delta_s}).$$

其中，$\delta_i=+1$(常被略之), 或 -1 分别表示沿 e_i 向前或向后之方向. 在基础图中一条径 W, 如 (12.3.8) 所示，的一个 提升 是指在其扩充图 $\tilde{G}$ 的一条径

$$\hat{W}=\tilde{e}_1^{\delta_1}\tilde{e}_2^{\delta_2}\cdots\tilde{e}_s^{\delta_s} \tag{12.3.9}$$

使得边 $\tilde{e}_i$ 为 e_i 上的纤维 $\hat{e}_i$ 中的边，$i=1,2,\cdots,s$.

引理 12.3.2　令 W 为一群 Γ 的群权图 $G(\Gamma)$ 中的一条径. 它的始端为 u. 则，对 u 上纤维中的每一个节点 $u_a, a\in\Gamma$, W 有唯一的提升以 u_a 为始端.

证　首先，考察 W 的以 u 为始端的第一边 e_1. 设 $e_1=(u,v)$ 且它的权为 b. 则，在 W 的提升中以 u_a 为始端的边只有 (u_a,v_{ab}). 另一方面，若 $e_1=(v,u)$ 带权 b^{-1}. 则，在 W 的提升中只有 $(v_a,u_{ab})^{-1}=(u_a,v_{ab^{-1}})$, 即 $(v_a,u_{ab^{-1}})^{-1}=(u_a,v_{ab})$. 然后，由第一边之唯一性，$W$ 的提升中第二边也是唯一的. 如此下去，由 W 长度的有限性，即得引理. ♮

当 W 是一个圈 C 时，可以看出若这个群为 Abel 群时，则 C 上的网权与始节点的选择无关. 若它不是 Abel 的，则相应于始端的不同选择的 C 上的不同的网权全是共轭的. 从而，在群中有相同的阶. 当然， C 的在逆方向上的网权为 C 的网权之逆. 基于引理 12.3.2, 进一步有如下

引理 12.3.3 *令 C 为一群 Γ 的一个群权图 G 中的一个 k- 圈使得 C 上的网权在 Γ 中为 m 阶的. 则，用 $nalp^{-1}(C^{-1})$ 所表示的 C 的所有提升之并的每个连通片均为 km- 圈并且有 $|\Gamma|/m$ 个这样的连通片.*

证 令 C 为一个回 (或闭径)W, 以 u 为起端. 记 b 为 W 上的网权和 u_a 为 u 上纤维中的一个节点. 则， $nalp^{-1}(C)$ 含 u_a 的连通片由回 W_a(由引理 12.3.2 知它为 W 的唯一提升), $W_{ab}, W_{ab^2}, \cdots, W_{ab^{m-1}}$ 中的边形成. 这些回皆一端接一端相连. 从而，为一个 km- 圈. 对于由网权 b 产生的循环群的 $|\Gamma|/m$ 个左陪集的每一个，有 $nalp^{-1}(C)$ 的唯一个连通片. 即得引理.

$\natural$

令 $G(\Gamma)$ 为一个群权图. 对每个 $a \in \Gamma$, 即权群，令

$$\tau_a : \hat{G} \to \hat{G} \tag{12.3.10}$$

使得 $\tau_a(v_b) = v_{ab}$(在节点上) 和 $\tau_a(e_b) = e_{ab}$(在边上). 容易验证， τ_a 是 $G(\Gamma)$ 的扩充图 $\hat{G}$ 上的一个自同构. 而且，也易看出 τ_1 是幺元和 $\tau_a\tau_b$ 也是 $\hat{G}$ 上的自同构. 进而，还知没有 $\tau_a, a \neq 1$, 带不动节点或不动边. 换言之， $\tau_a, a \in \Gamma$, 是自由地作用到 $\hat{G}$ 上. 这样， Γ 同构于 Aut $(\hat{G})$ 的一个子群.

定理 12.3.1 *令 $G(\Gamma)$ 为一群 Γ 的某群权图. $\hat{G}$ 为它的*

扩充图. 则, 有

$$G(\Gamma) = \hat{G}/\Gamma. \tag{12.3.11}$$

证 因为 Γ 同构于 Aut $(\hat{G})$ 的一个子群, 从 (12.3.10) 即得定理. ♮

这个定理使我们对于图 G 的权群不必将扩充图 $\hat{G}$ 和覆盖图 $\tilde{G}$ 加以区别.

一个群权图 $G(\Gamma)$, 若所有在 $G(\Gamma)$ 中圈的网权均为 Γ 的幺元, 或者说满足 Kirchhoff 电压定律 (KVL), 则称之为 *电压图*. 当一个电压图嵌入到曲面上, 其在此曲面上对偶嵌入的基准图被称为 *电流图*. 不管电压图还是电流图均曾用来求完全图在曲面上的三角剖分. 事实上, 它们在研究 Cayley 图或者它的推广, Schreier 图的曲面嵌入时尤其有效. 已经知道, 大多数的正则图均为 Schreier 图. 所谓 *Schrier 色图*, 用 $\widetilde{Sch}(\Gamma : \Lambda; X)$ 表示, 其中 Λ 为 Γ 的一个子群, X 为 Γ 的生成元的集合, 是这样的图使得节点集为在 Γ 中 Λ 的 (右) 陪集 (当 Λ 非正规时) 的集合, 用 $\Gamma : \Lambda$ 表示和由 $a \in \Gamma : \Lambda$ 带色 $x \in X$ 指向 ax, 即 $\prec a, ax \succ$ 或与 Cayley 色图情形相仿也简记为 x_a 作为边. 同样地, 还可定义 *第 0 类 Schreier 图*, 用 $Sch_0(\Gamma : \Lambda; X)$ 表示, 和 *第 1 类 Schreier 图*, 用 $Sch_1(\Gamma; \Lambda; X)_\xi$ 表示. 但, 这时一个 2- 有向圈上的色不一定在 Γ 中为 2 阶的. 这个圈在 $Sch_1(\Gamma : \Lambda; X)$ 中也变为一条边. 将 $Sch_0(\Gamma; \Lambda; X)$ 和 $Sch_1(\Gamma : \Lambda; X)$ 也统称为 *Schreier 图*, 并记为 $Sch(\Gamma : \Lambda; X)$. 例如, 在图 12.3.3 中, (a),(b) 和 (c) 分别为 Schreier 色图, 第 0 类 Schreier 图和第 1 类 Schreier 图. 其中, $\Gamma = \{0,1,2,3\} = Z_4$. $\Lambda = \{0,2\}$ 和 $X = \{2,3\}$. 这时, 自然 Λ 是正规的. 它的陪集用 Λ 和 $\Lambda_1 = \{1,3\}$ 表示.

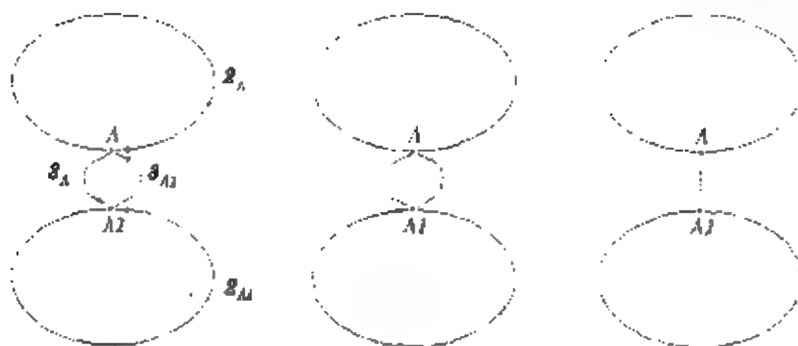


图 12.3.3

定理 12.3.2 令 Γ 是一个群，且 X 为 Γ 的生成元集合．则，Cayley 图 $Cayl_0(\Gamma,X)$ 是环束 B_n 的一个覆盖．其中，B_n 为由一个节点和 n 个环组成的图．

证　设 u 为 B_n 的那个节点和 $e_i, i=1,2,\cdots,n$, 为 B_n 中的 n 个环．如果生成元 $x_i\in X$ 被分配到 e_i 上作为权，$i=1,2,\cdots,n$, 则可以看出覆盖图 $\tilde{B}_n$ 与这个 Cayley 色图 $\widetilde{Cayl}(\Gamma,X)$ 同构．因为 τ: $\tilde{B}_n\to\widetilde{Cayl}(\Gamma,X)$ 使得

$$\begin{cases}\tau(v_a)=a,\ a\in\Gamma;\\ \tau(e_i,a)=(x_i,a),\ x_i\in X,a\in\Gamma\end{cases}$$

就是一个同构．定理得证．

另外，由定理 12.3.1, 若 G 是 B_n 的一个覆盖图和若这个关联群 Γ 为自由地作用在 G 上，则有 Γ 中元素作为权到 B_n 上的一个分配，使得分配的权生成 Γ 并且覆盖图 $\tilde{B}_n$ 与 G 同构．

§12.4　下可嵌入性

设一个图有一个三角剖分，即曲面上的这样一个嵌入使得

所有的面皆三角形. 一个图的三角剖分性, 即指确定这个图在曲面上是否有三角剖分. 它对于研究图在曲面上的下可嵌入性曾起过重要作用. 事实上, n 阶完全图 K_n 的下可嵌入性就是所谓引线问题. 它是由 Hilbert 和 Cohn–Vossen 在 [HiC1] 中提到的. 特别是它被用来证明 Heawood 地图着色定理的主要的而且是最困难的部分. 这方面的详情可参见 [Rin3, Liu13-17]. 本节只讨论论证 K_n 的下可嵌入性之核心思想. 这就是利用商嵌入以电压图 (或对偶地, 电流图) 之形式相应地构造图的下嵌入.

引理 12.4.1 图 $G = (V, E)$ 在曲面 P_p(或 Q_q) 上的嵌入 $\mu(G)$, F 为它的面集, 为一个三角剖分当且仅当在 F 中有 $2|V| - 4 + 4p$ (或 $2|V| - 4 + 2q$) 个面, 或者等价地, E 中有 $3|V| - 6 + 6p$(或 $3|V| - 6 + 3p$) 条边.

证 因为 $\mu(G)$ 为 P_p(或 Q_q) 上的一个嵌入且每个面皆三角形, 有 $3|F| = 2|E|$. 由 Euler 公式 (1.5.7), 有

$$|F| = 2|V| - 4 + 4p \quad (\text{或 } 2|V| - 4 + 2q).$$

这就得到了必要性.

反之, 若面的数目为 $2|V|-4+4p$(或 $2|V|-4+2q$), 由于 $\mu(G)$ 是一个嵌入, 使我们可以用 Euler 公式 (1.5.7) 知 $3|F| = 2|E|$. 这就意味 $\mu(G)$ 的所有面必皆三角形, 即得充分性. ♮

事实上, 任何一个 n 阶图 $G = (V, E)$, 即 $|V| = n$, 总可视为 K_n 的子图. 若用 t 表示 K_n 中不属于 E 的边的数目, 并用 $K_n - \{t\}$ 表示在 K_n 中去掉 t 条边后所得的图, 则 G 自然属于这种类型的图. 这就允许我们在研究一般图 (当然, 简单且连通的) 的三角剖分性时只就 $K_n - \{t\}$ 而论.

引理 12.4.2 若 $K_n-\{t\}$ 在曲面 $P_p, p\geq 0$, 上有一个三角剖分，则必有

$$p=\frac{(n-3)(n-4)-2t}{12} \tag{12.4.1}$$

且 n 为下面四种情形之一:

$$n=\begin{cases}0,3,4,\ 或\ 7\ (\mathrm{mod}\ 12), & 当\ t=0\ (\mathrm{mod}\ 6);\\ 2,\ 或\ 5\ (\mathrm{mod}\ 12), & 当\ t=1\ (\mathrm{mod}\ 6);\\ 1,6,9\ 或\ 10\ (\mathrm{mod}\ 12), & 当\ t=3\ (\mathrm{mod}\ 6);\\ 8\ 或\ 11\ (\mathrm{mod}\ 12), & 当\ t=4\ (\mathrm{mod}\ 6).\end{cases} \tag{12.4.2}$$

其中 $t=2$, 或 5 (mod 6) 是不会出现的.

证 由引理 12.4.1, 有

$$\frac{n(n-1)}{2}-t=3n+6p-6.$$

这就意味

$$p=\frac{(n-3)(n-4)-2t}{12}.$$

即得关系 (12.4.1). 由 p 的整数性，有

$$(n-3)(n-4)-2t=0\ (\mathrm{mod}\ 12). \tag{12.4.3}$$

因为只需对 $0\leq n\leq 11$ 和 $0\leq t\leq 5$ 讨论关系 (12.4.3). 通过枚举可知当 $t=2$, 或 5 时，不存在 n 满足 (12.4.3) 和对 $t=0,1,3$ 或 4 允许关系 (12.4.3). 从而，进一步可得 (12.4.2). ∎

引理 12.4.3 若 $K_n-\{t\}$ 在曲面 $Q_q, q\geq 1$, 上有一个三

角剖分，则必有

$$q = \frac{(n-3)(n-4)-2t}{6} \tag{12.4.4}$$

和 n 为如下二种情形之一：

$$n = \begin{cases} 0,1,3,\text{ 或 } 4 \pmod 6, & \text{当 } t = 0 \pmod 3; \\ 2,\text{ 或 } 5 \pmod 6, & \text{当 } t = 1 \pmod 3. \end{cases} \tag{12.4.5}$$

同时， $t = 2 \pmod 3$ 是不会出现的.

证 由引理 12.4.1, 有

$$\frac{n(n-1)}{2} - t = 3n - 6 + 3q.$$

这就意味

$$q = \frac{(n-3)(n-4)-2t}{6},$$

即得 (12.4.4). 由 q 为整数，有

$$(n-3)(n-4) - 2t = 0 \pmod 6. \tag{12.4.6}$$

因为只需对 $0 \le n \le 5$ 和 $0 \le t \le 2$ 讨论 (12.4.6). 通过枚举，即知情形 $t = 2 \pmod 3$ 不可能出现和当 $t = 0$, 或 $1 \pmod 3$ 时即导致 (12.4.5). 引理得证. ▮

由于 K_n 为 $K_n - \{t\}$ 的 $t = 0$ 之情形，从引理 12.4.2-3 即得下面的

推论 12.4.1 若 K_n 在曲面 P_p(或 Q_q) 上有三角剖分，则必有

$$p = \frac{(n-3)(n-4)}{12}\left(\text{或 } q = \frac{(n-3)(n-4)}{6}\right) \tag{12.4.7}$$

和 n 只能为如下的情形之一:

$$n=0,3,4,\ 或\ 7\ (\mathrm{mod}\ 12)\ (或\ 0,1,3,\ 或\ 4(\mathrm{mod}\ 6)). \qquad (12.4.8)$$

更重要也更困难的部分是考察 (12.4.7) 和 (12.4.8) 对于 K_n 具有三角剖分是否充分. 为完成这部分, 我们要构造 K_n 在亏格如 (12.4.7) 给出的曲面上的三角剖分. 其中, n 满足条件 (12,4,8). 这一任务可以通过利用商嵌入或更准确地电流图 (或对偶地, 电压图) 之嵌入来完成. 这里, 典型且较容易的情形为对于 $n=7$ (mod 12). 当然, 是在可定向的情形下. 若记 $n=12s+7$, $s\geq 0$, 则, 这时 K_n 有 $12s+7$ 个节点和 $(12s+7)(6s+3)$ 条边. 我们的目标是构造 K_n 的一个嵌入具有 $(12s+7)(4s+2)$ 个面. 节点数, 边数和面数的最大公约数为 $12s+7$. 由此, 一个可能的途径是考察一个有 $4s+2$ 个节点, $6s+3$ 条边和一个面的嵌入作为 K_n 的嵌入之对偶的候选商嵌入. 事实上, 这个商嵌入的对偶为一个含有 $6s+3$ 个环的环束在曲面 P_{s+1} 上的一个嵌入. 只要这个候选者被找到, 剩下的问题就是如何找到这个群使得对于它这个候选者确为一个商嵌入. 由于它有 $6s+3$ 条边, 这就建议我们要找一个 $12s+7$ 阶的群以便将它的 $6s+3$ 个, 其中任何两个均互不为逆, 元素分配给这 $6s+3$ 条边, 同时在每个 3- 节点处满足 Kirchhoff 电流定律 (mod $12s+7$).

若我们取 Z_{12s+7}, 即模 $12s+7$ 的整数群, 为这个群, 则, 总可以找到满足所述条件的权分配. 对 $s\geq 1$, 这个一般的电流图在图 12.4.1 中给出. 其中, 实圆点所表示的节点处的旋为逆时针方向. 自然, 那些以小圆圈表示的节点处的旋为顺时针方向. 未标示出权的边上的之权可依照 Kirchhoff 电流定律从给出的权沿 Hamilton 圈 $(v_0,v_1,\cdots,v_{4s+1})$ 依次导出. 在每一条边二侧的细虚线是依所示的方向根据旅行规则 (§2.1) 所得的那个面的边界. 由 Euler 公式可知它是在曲面 P_{s+1} 上的一个嵌入.

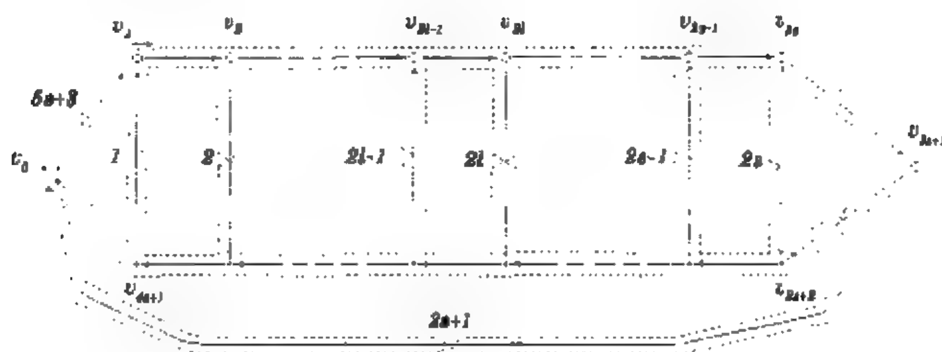


图 12.4.1

现在，我们可以容易地从电流图在 P_{s+1} 上的嵌入，即商嵌入，产生它的覆盖嵌入. 事实上，只要将电流图嵌入的那个面边界所确定的权的循环序列对这个群每一个元作群的运算即可得到. 因为共有 $12s+7$ 个元可产生 $12s+7$ 个面. 这个覆盖嵌入的对偶就是 K_n, $n=12s+7$, $s\geq 1$, 在亏格为 $12s^2+7s+1$(由 (12.4.7) 所确定) 的可定向曲面上的一个三角剖分.

因为商嵌入不含 $s=0$ 的情形，我们还要看是否 K_7 可以在亏格为 1 的可定向曲面上 (即环面) 有三角剖分，在图 12.4.2 中就给出了这个三角剖分.

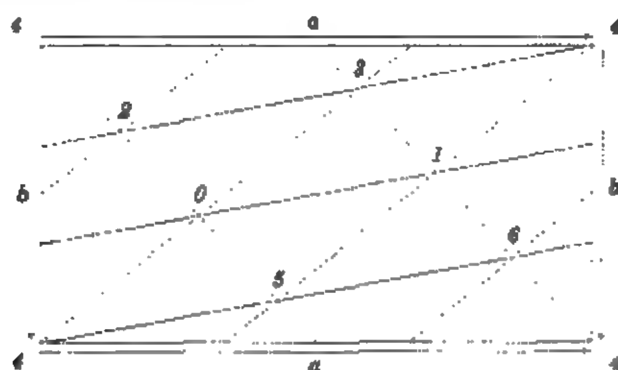


图 12.4.2

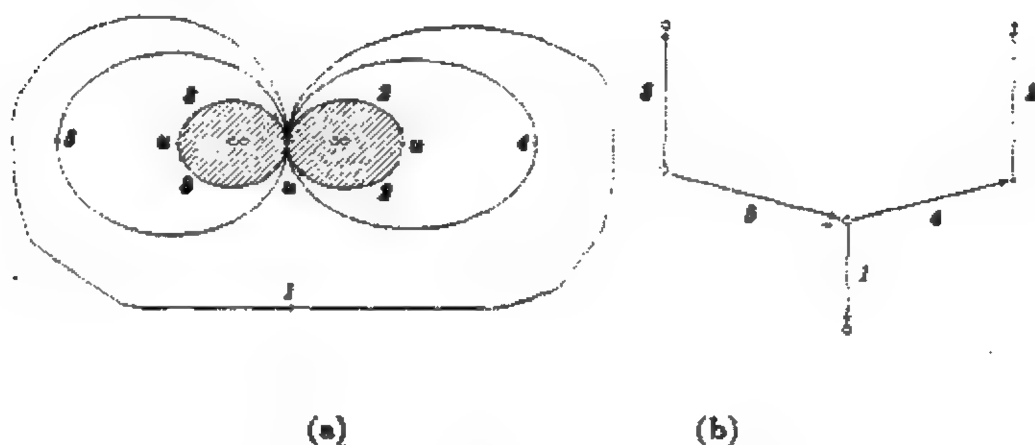
与情形 $s=7 \pmod{12}$ 相仿地，我们也可以为构造出 $K_n, n=0,3$ 和 $4 \pmod{12}$, 在相应的可定向曲面上的三角剖分先找出一

个相应的商嵌入．不过，对这些情形均需引入一些各有特色的技巧才能利用这个一般的方法．这就是说，我们可以得到如下的

引理 12.4.4 对于 $n = 0, 3, 4$ 或 $7 \pmod{12}$, K_n 在亏格为如 (12.4.7) 所示的 p 的可定向曲面上有一个三角剖分．

对于不可定向曲面，我们这里也仅分析一个典型且较简单的情形．这就是 $n = 0 \pmod{12}$.

首先，从图 12.4.3 的 (a) 可以看出 K_{11} 对 Z_{11} 为权群 (电压) 的商图 (电压图) 的一个在 Q_2, 即 Klein 瓶，上的一个嵌入．通过此，先构造 K_{11} 在不可定向曲面 Q_{12} 上的一个嵌入．它有 11 个节点，55 条边和 34 个面．在面中，有 33 个三角形的一个边界长为 11 的面．然后，再由这个嵌入求 K_{12} 在 Q_{12} 上的一个三角剖分．事实上，只要在那个边界长为 11 的面内引进一个节点并与边界上 11 个节点都连上边即得．在图 12.4.3(a) 中，带阴影的部分表示在相应的区域中有一个叉帽．也就是说，那二个分别带权 2 和 3 的边皆环．图 12.4.3(b) 给出了 (a) 的对偶情形．即电流图在 Q_2 中的嵌入．



(a) (b)

图 12.4.3

一般地，即对于 $s \geq 2$, $n = 12n$, 我们利用群 Z_{12s-1} 上的电流图如图 12.4.4 所示的嵌入求得 K_{n-1} 的嵌入之对偶. 其中，只一个面边界长为 $n-1$, 即 K_{n-1} 的一个 Hamilton 圈，其它所有面皆三角形. 自然，它所在的不可定向曲面的亏格为由 (12.4.7) 给出. 最后，在这个例外面中引进一个新的节点并与这个 Hamilton 圈上每一节点连一边即可得所要求的 K_n 的三角剖分.

图 12.4.4

用相仿的方法，但必须对每种情形作具体分析并作一些很巧妙的处理，我们也可对 $n = 0, 1$ 和 $7 (n \neq 7)$, 3 和 9, 或 4 和 10 (mod 12) 求出 K_n 在亏格由 (12.4.7) 确定的不可定向曲面上的三角剖分. 从而，我们有

引理 12.4.5 对于 $n = 0, 1 (n \neq 7$, 因为可以证明 K_7 不可能在 Klein 瓶上有三角剖分), 3, 或 4 (mod 6), K_n 均在亏格如 (12.4.7) 所确定的不可定向曲面上有三角剖分. ♮

由引理 12.4.4-5, 可见条件 (12.4.8) 对于 K_n, 除去 $n = 7$ 的不可定向情形这个仅有的例外，具有三角剖分是充分的. 而且，还可以看出对于 $n = 0, 3, 4$, 或 7 (mod 12) ($n = 0, 1 (n \neq 7)$, 3, 或 4 (mod 6)), K_n 在可定向 (不可定向) 曲面上全是下可嵌

入的. 进而, 通过讨论 $K_n - K_2$, $n = 5 \pmod{12}$; $K_n - K_3$, $n = 1,6$ 或 $10 \pmod{12}$; $K_n - K_5$, $n = 11 \pmod{12}$, 以及 K_{n+1} 的一些子图, $n = 2,8$, 或 $9 \pmod{12}$, 的三角剖分性, 同时用一些巧妙的变换, 可以表明 n 阶完全图 K_n 是可以嵌入到亏格为 $\left\lceil\frac{(n-3)(n-4)}{12}\right\rceil$ 的可定向曲面上的. 在上面的叙述中, $K_n - K_r$, $r = 2,3,5$, 是指在 K_n 中去掉它的一个完全子图 K_r 的所有边而得到的图. 这就使我们有

定理 12.4.1 完全图 $K_n, n \geq 3$, 在可定向曲面上全是下可嵌入的.

证 由引理 12.4.4 和上面所讨论的, 可以看出 $K_n, n \geq 3$, 总可嵌入到 P_p, $p = \left\lceil\frac{(n-3)(n-4)}{12}\right\rceil$, 上. 而且,

$$\left\lceil\frac{\beta(K_n)}{2} - \frac{\varepsilon}{3}\right\rceil = \left\lceil\frac{n(n-1) - 6n + 12}{12}\right\rceil = p.$$

由推论 12.1.1 即得定理. ▯

对于不可定向曲面, 剩下的情形为 $n = 2,5,8$ 和 $11 \pmod{12}$. 通过讨论 $K_n - K_2$, $n = 5$ 或 $11 \pmod{12}$; K_n 带上二条附加边, $n = 2 \pmod{12}$; 以及 K_{n+1} 的一个子图, $n = 8 \pmod{12}$, 的三角剖分性, 伴之一些适当的变换, 即可表明 K_n 可以嵌入到 Q_q 上. 其中, $q = \left\lceil\frac{(n-3)(n-4)}{6}\right\rceil$. 从而, 我们也有

定理 12.4.2 完全图 $K_n, n \geq 3$, $n \neq 7$, 在不可定向曲面上全是下可嵌入的.

证 由引理 12.4.5 和上面所讨论的, 可以看出 $K_n, n \geq 3$, $n \neq 7$, 总可嵌入到不可定向曲面 Q_q 上, $q = \left\lceil\frac{(n-3)(n-4)}{6}\right\rceil$.

而且,

$$\beta(K_n)+1-\left\lfloor\frac{2\varepsilon}{2}\right\rfloor=\frac{n(n-1)}{2}-+2-\frac{n)(n-1)}{3}=q.$$

由推论 12.1.2, 即得定理.

最后, 我们还要指出, 对于无三角形 (即, 3- 圈) 的图, 推论 12.1.1 和推论 12.1.2 中的下界可以分别改进为 $\left\lceil\frac{\beta(G)-\nu+3}{4}\right\rceil$ (当可定向时) 和 $\left\lceil\frac{\beta(G)-\nu+3}{2}\right\rceil$ (当不可定向时). 这时之下嵌入, 自然指在亏格为 $\left\lceil\frac{\beta(G)-\nu+3}{4}\right\rceil$ (可定向时) 或 $\left\lceil\frac{\beta(G)-\nu+3}{2}\right\rceil$ (不可定向时) 的曲面上的嵌入. 其中, ν 和 ε 分别为图 G 的阶与度. 这里的方法也可用于确定 $K_{m,n}$, $K_{n_1,n_2,\cdots,n_s}$, $s\geq 3$, Q_n 以及其它一些有 4- 圈的图的下可嵌入性.

§12.5 注记

12.5.1 图的曲面可嵌入性导源于进攻 Heawood 地图着色猜想. Heawood 于 1890 年提出了这个猜想 [Hb1]. Hilbert 和 Cohn-Vossen 将它的解决归结为引线问题 [HiC1]. 一直到 1968 年, 这个猜想才变成了定理. 其完备的证明可参见 [Rin3]. 在 [Liu13-17] 中, 还可以看到对于这个证明的简化与对一些概念的澄清. 同时, 也可以看到直到 70 年代末有关图的曲面嵌入的文献. 这一专题的研究近况在 [GroT1] 中有所介绍.

12.5.2 从一个图的支撑树嵌入到球面上开始以算法的形式确定这个图的最大亏格 (可定向或不可定向的) 之方法出自 1979 年 [Liu8-9]. 同时, 在这一年里也出现了用图的亏数表征它的可定向最大亏格 [Xuo1].

12.5.3 虽然已经证明很多类的图在可定向曲面上是上

可嵌入的 [Liu10]. 一般地， 3- 正则的图在什么样的明显条件下是上可嵌入的似乎仍然是我们现在尚不清楚的一个核心的问题.

12.5.4 电流图是由 Gustin 于 1963 年首先引进的 [Gu1]. 之后，由 Youngs 提出了重要改进 [You1]. 其对偶形式，即电压图是于 70 年代由 Gross 首先利用. 接着，又由 Tucker 作出了改进 [GroT1]. 不管怎样，在一个给定图上分配权 (电流或电压) 是一类组合设计问题. 这个问题距完满解决仍很遥远.

12.5.5 通过改进推论 12.1.1-2 中的下界，很多类的下可嵌入性问题可以相应地提出，然而，即使是确定一个图具有三角剖分的表征仍距完满解决尚很遥远. 现在，我们仅知道一些部分的解答. 例如 $K-K_2$, $K-K_3$, $K-K_5$ 等 [Liu13-17].

12.5.6 如何用禁用构形表征一个图是否在给定亏格的曲面上有一个嵌入至今仍是很活跃的. 然，已被证明对于给定亏格的曲面，图在其上的可嵌入性可以用有限个禁用构形表征 [RS1-3]. 不管怎样，除了熟知的 Kuratowski 定理用两个图 K_5 和 $K_{3,3}$ 组成了对图的平面性，或者说对于在 P_0 上的可嵌入性的禁用构形的完备集 [Kur1]. 还知道对于图在射影平面 Q_1 上的可嵌入性的禁用构形的完备集由 103 个元素组成 [GHW1], 和对于图在任何不可定向的曲面上的可嵌入性的禁用构形包含有限个 3- 正则图 [ArH2]. 关于这一专题还可参考 [Arch1], [ArH1] ,[GiH1-2].

12.5.7 将禁用构形作为子形近年来有了很大的发展 [RS1-3]. 所谓一个图 G 的 *子形* M 是指这样的图 M 使得与将 G 的某个连通子图收缩一些边所得的图同构. Robertson 和 Seymour 证明：对于图上的任何一个性质 P, 只要 P 在子形上是闭的，

则必存在图的一个有限集 L 使得任何一个图 G 具有 P 当且仅当不存在一个子形与 L 中的某个图同构. 常称这一事实为图的 *子形定理*. L 中的元素均视为对于 P 的禁用构形, 即极小的不具有性质 P 的图. 作为这个定理的一个重要结果, 我们知道对上述性质的识别是可以在算法上多项式地实现的. 当然, L 是依赖 P 的. 对于一个给定的 P, 将 L 求出来仍然是一个不可避免的问题. 例如, 若 P 表示平面性, L 就由 K_5 和 $K_{3,3}$ 这二个图组成.

12.5.8 另一个应该在这里提到的关于图的子式的专题就是所谓 Wagner 猜想: 对于图的任何一个无限序列 $\{G_\alpha|\alpha \in C\}$, C 为一个数的无限集, 总存在指标 i 和 j, $i < j$, 使得 G_i 与 G_j 中的一个子形同构. 虽然, 这个猜想一般而言已被证明不成立, 但对于 C 为可数集时仍然是一个公开问题.

12.5.9 进而, 在第十四章中, 我们还将会看到对于拟阵的子形也可作类似的研究.

12.5.10 因为对于图上的性质 P 的禁用构形一般而言可以不是子形, 如何估计这种禁用构形的完备集之基数仍然是尚未解决的问题. 例如, 在可平面图上的 4- 可着色性对于子形是闭的. 但无子形为这种性质的禁用构形. 当然, 这是与图的子形定理一致的. 然而, 我们至今仍不知道对此是否有由小于一千个禁用构形组成的一个完备集 [AH1–3, AHK1, He1–2, Liu13–17].

第十三章

极值问题

§13.1 最优凸嵌入

从 §4.4 中所讨论的，我们已经知道如果一个图以 f_0 为无限面在平面上有一个凸嵌入，则对于平面上的任一凸多边形选定为 f_0 的边界，这个图都有平面上的凸嵌入. 这里，我们总是假设以一个给定的凸多边形为无限面的边界所讨论的图是凸可嵌入的.

令 $G=(V,E)$ 是一个图且以 B_0 作为无限面边界是凸可嵌入的. 设在每一节点 $v\in V$ 处，有一个权 $w_v>0$ 和 B_0 为平面上的一个凸多边形. 对于 G 的一个凸嵌入 $\mu(G)$ 并带有边界条件：无限面的边界就是给定的凸多边形 B_0. 其节点集为 $V(B_0)=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$, $k\geq 3$. 记

$$f(\mu G)=\sum_{u\in V} w_u \sum_{\substack{(u,v)\in E\setminus E(B_0)\\ v\in V_u}} w_v l_\mu(u,v). \tag{13.1.1}$$

其中， $l_\mu(u,v)$ 为边 (u,v) 在 $\mu(G)$ 上之长度， $E(B_0)$ 为 B_0 上边的集合. 我们这里所关心的问题就是求出不在 B_0 上的节点的坐标. 自然，它们都在 B_0 的内部区域中，使得可以求出 G

的一个凸嵌入 $\mu_0(G)$ 具有性质：

$$f(\mu_0 G) = \min_{\mu} f(\mu G). \tag{13.1.2}$$

其中， μ 取遍满足边界条件的所有可能凸嵌入．在 (13.1.2) 中之 μ_0 被称为最优解，或者说 G 的最小凸嵌入．

因为总是假设 G 为简单的，当然不会有重边，所有最小凸嵌入必定是平面上的直线嵌入．这就允许我们将在 $\mu(G)$ 中边的长度视为欧氏距离．对于 $v \in V$，令 x_v 和 y_v 为 v 在平面上的坐标．则，对于 G 的一个平面嵌入 μ，函数

$$g(\mu G) = \sum_{u \in V} w_u \sum_{(u,v) \in E \setminus E(B_0)} w_v l_\mu^2(u, v) \tag{13.1.3}$$

与函数 $f(\mu(G)$ 有相同的最优解．其中

$$l_\mu(u, v) = \sqrt{(x_u - x_v)^2 + (y_u - y_v)^2}. \tag{13.1.4}$$

人们也许会想到这样的一个最简单的情形，即在一平面嵌入 $\mu(G)$ 中只有一个内点．或换句话说， $G = W_{s+1}$ 为一个阶为 $s+1$ 的轮图．我们看一看这时问题的最优解是怎样的．

设 v 是这个内节点， $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 为其它节点，即在无限面边界上的节点．这时，只有两个变量 x_v 和 y_v 是未知的，即 v 的二个坐标．因为

$$\begin{aligned} g(\mu W_{s+1}) &= \sum_{i=1}^{s} w_v w_{a_i} + \sum_{i=1}^{s} w_{a_i} w_v l_\mu^2(a_i, v) \\ &= 2 \sum_{i=1}^{s} w_v w_{a_i} l_\mu^2(v, a_i) \end{aligned}$$

在平面上是一个凸函数，它有唯一的最小值且由如下的方程所

确定：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x_v} = 4\sum_{i=1}^{s} w_v w_{a_i}(x_v - p_i) = 0; \\ \dfrac{\partial g}{\partial y_v} = 4\sum_{i=1}^{s} w_a w_{a_i}(y_v - q_i) = 0. \end{cases} \tag{13.1.5}$$

这个方程又与下面的方程等价：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{s} w_{a_i}(x_v - p_i) = 0; \\ \sum_{i=1}^{s} w_{a_i}(y_v - q_i) = 0. \end{cases} \tag{13.1.6}$$

并称之为这个问题的 *临界方程*. 其中， $p_i = x_{a_i}$, $q_i = y_{a_i}$, $i = 1, 2, \cdots, s$, 全是已知的.

容易看出，由 (13.1.6) 所给出的临界方程对于确有些 i, $i = 1, 2, \cdots, s$, $w_{a_i} > 0$ 是适定的. 而且，这个解为：

$$\begin{cases} x_v = \dfrac{\sum_{i=1}^{s} w_{a_i} p_i}{\sum_{i=1}^{s} w_{a_i}}; \\ y_v = \dfrac{\sum_{i=1}^{s} w_{a_i} q_i}{\sum_{i=1}^{s} w_{a_i}}. \end{cases} \tag{13.1.7}$$

这说明它为 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 的重心. 也容易看出，由 (13.1.17) 所确定的 W_{s+1} 在平面上的直线嵌入为凸的当且仅当无限面的边界是一个凸多边形.

而且，这样一种较简单的想法只要稍加注意多个内节点时所引起的差异即可引伸到一般的情形.

为简便，让我们记

$$v = (x_v, y_v), \tag{13.1.8a}$$

$v \in V - V(B_0)$. 同样地，也记

$$a = (x_a, y_a) \tag{13.1.8b}$$

$a \in V(B_0)$. 进而，令

$$\begin{cases} W_u = \sum\limits_{\substack{(u,v)\in E\setminus E(B_0)\\ v\in V\setminus V(B_0)}} w_v + \sum\limits_{\substack{(u,a)\in E\setminus E(B_0)\\ a\in V(B_0)}} w_a; \\ d_u = \sum\limits_{\substack{(u,a)\in E\setminus E(B_0)\\ a\in V(B_0)}} w_a a. \end{cases} \tag{13.1.9}$$

其中，$u \in V - V(B_0)$.

至此，我们可以对任何给定的平面嵌入 $\mu(G)$ 引进下面的方程组：$\forall u \in V - V(B_0)$,

$$W_u u - \sum_{\substack{v\in V\setminus V(B_0)\\ (u,v)\in E}} w_v v = d_u. \tag{13.1.10}$$

引理 13.1.1 对于一个给定的图 $G = (V, E)$, 节点之权 $w_v, v \in V$, 为正，且选定了无限面的边界，方程组 (13.1.10) 是适定的.

证 因为由 (13.1.9) 我们总有，对任何 $u \in V\setminus V(B_0)$,

$$W_u - \sum_{\substack{v\in V\setminus V(B_0)\\ (u,v)\in E}} w_v = \sum_{\substack{a\in V(B_0)\\ (u,a)\in E\setminus E(B_0)}} w_a \geq 0,$$

方程 (13.1.10) 的系数矩阵没有一个特征值为 0. 从而，它是适定的. ▯

由于根据第五章提供的理论判定一个图的平面性并使得无限面边界为给定的圈，我们可以在这里只讨论一个图带有一个圈作为下面提及的边界总是可平面的带这样的边界条件使得给定的圈为其平面嵌入的无限面边界. 如果已经得到了方程 (13.1.10) 的一组解，则只要将每对相邻的节点的坐标点用一条直线段连接即可唯一地构造一个直线嵌入. 我们称这个嵌入为 G 的 *一个临界嵌入* 并且以 B_0 作为无限面的边界.

引理 13.1.2 *由方程 (13.1.10) 的解所确定的临界嵌入使由 (13.1.1) 表示的 $f(\mu, G)$ 在所有可能的以 B_0 为无限面边界的嵌入 $\mu(G)$ 中取最小值.*

证 由于 $f(\mu, G)$ 与 $g(\mu, G)$ 有相同的最小解. 可以只讨论 $g(\mu, G)$. 由 $g(\mu G)$ 的凸性，这一点可以容易地由 $g(\mu G)$ 的 Jacobi 行列式的正定性以验证 $g(\mu, G)$ 有唯一最小值. 而且，这个值在以 B_0 为边界的方程 (13.1.10) 的那个解上达到. 从而，引理得证. ▯

显见，临界嵌入不总是凸的. 因为假若将 B_0 取平面上的非凸多边形时，则这时的临界嵌入自然也是非凸的. 然而，我们确有

引理 13.1.3 *一个图 $G = (V, E)$ 以 B_0 为边界的临界嵌入是凸的当且仅当 B_0 为平面上的一个凸多边形.*

证 由上面的讨论可知必要性是直接的. 为证充分性，我们要先证两个断言.

断言 1 *在临界嵌入中，每一个内节点皆在其所有相邻*

节点的凸包的内部区域中.

证 令 v 为临界嵌入的外边界内的一个节点. 记 $v_1, v_2, \cdots, v_l$ 为所有与 v 相邻的节点. 因为所有内节点均满足方程 (13.1.10), 由上面的对于轮的情形之讨论即可发现 v 必处在 $v_1, v_2, \cdots, v_l$ 分别带权 $w_1 = w_{v_1}, w_2 = w_{v_2}, \cdots, w_l = w_{v_l}$ 的重心. 从而, v 在 $v_1, v_2, \cdots, v_l$ 的凸包之内部. 即得断言. ▮

断言 2 若一个面 f 在一个平面嵌入中不是一个凸多边形, 则在 f 的边界上必有一个节点不在其所有相邻节点的凸包的内部.

证 由于 f 不是一个凸多边形, 在 f 的边界上必有一个节点 v. 设在 f 边界上的两个与 v 相邻的节点为 u 和 w. 则, 它们在 G 中不相邻且连它们的直线段与 f 的内部没有公共点. 然而, 这时 v 本身不可能在它的所有邻节点的凸包的内部区域中. 这就得到了断言. ▮

用反证法. 若临界嵌入不是凸的, 则它必有一个面 f 不是凸多边形. 由断言 2 在 f 的边界上有一个节点 v 使得它不在其所有邻节点的凸包的内部区域中. 然, 这又与断言 1 矛盾. 从而, 充分性得证. ▮

定理 13.1.1 对于图 $G = (V, E)$ 的一个平面嵌入 $\mu(G)$ 以给定的 B_0 为无限面边界, 由 (13.1.1) 所定义的 $f(\mu, G)$ 在一个凸嵌入 $\mu_0(G)$ 上取最小值, 当且仅当 B_0 形成一个凸多边形而且这个凸嵌入 $\mu_0(G)$ 就是由方程 (13.1.10) 所确定的那个临界嵌入.

证 引理 13.1.1-3 的一个直接结果. ▮

由这个定理, 使我们可以称方程 (13.1.10) 为对于一般的图

而不限于轮的临界方程.

若将所有节点的权均取为常数, 特别是 1, 则方程 (13.1.10) 变为

$$\rho_G(u)u - \sum_{\substack{v\in V\setminus V(B_0)\\(u,v)\in E}} v = \sum_{\substack{a\in V(B_0)\\(u,a)\in E}} a. \tag{13.1.11}$$

其中, $u\in V\setminus V(B_0)$.

推论 13.1.1 对于限制无限面边界为 B_0 的图 $G_1=(V,E)$ 的一个平面嵌入, 当 B_0 是一个凸多边形时只要以 B_0 为无限面边界 G 就是凸可嵌入的, 则那个由方程 (13.1.11) 的解所确定的直线嵌入必为一个凸嵌入.

证 定理 13.1.1 在对所有 $v\in V, w_v=1$ 时的直接结果. ▮

这个推论就是由 Tutte 首先发现的一个定理 [Tut15].

假若将边界条件减弱为 B_0 的至少三个节点在平面上不共线, 则对于这样一类的相应边界问题也可以用以上所述的相仿的方法解决.

事实上, 上面所讨论的确定 $f(\mu G)$ 的最小值的问题组合上与如下的问题等价: 对于图 $G=(V,E)$, 求它的一个平面嵌入 $\mu(G)$ 使得

$$h(\mu G) = \sum_{e\in E\setminus E(B_0)} w(e)l_\mu(e)$$

取得最小值. 其中, $w(e)>0$ 为在 $E\setminus E(B_0)$ 上定义的权函数, $e=(u,v)$, $u,v\in V$. B_0 为给定的边界.

§13.2 最短三角剖分

设图 $G=(V,E)$ 在平面上的一个直线嵌入 $\mu(G)$ 已经给出. 当然, 可以假设 $\mu(G)$ 是最小嵌入. 如上节所讨论的, 无

限面的边界是给定的而且所有节点上的权皆取为 1. 在这里，不必假设这个嵌入是凸的.

若 $\mu(G)$ 的一个 *内面*, 即有限面，不是三角形，则可以将它的边界上的一些不相邻的节点对连边而划分为三角形面的并. 这样的一种划分称为 *砌合方案*. 这个过程被称为 *砌合* 这个面. 将面砌合之后所得的结构被称为此面的 *三角剖分* 或者也称为它的 *砌合*. 若一个平面嵌入的所有有限面均被砌合了，则所得的结构也被称为这个嵌入的 *三角剖分*，或 *砌合*.

一个平面嵌入 $\mu(G)$ 的三角剖分使得其中所有三角形面的周长之总和在所有可能的它的三角剖分中达到最小，则称之为 *最短的*. 如何有效地求出一个平面嵌入 $\mu(G)$, 或进而图 $G=(V,E)$ 的最短砌合是我们在这一节所讨论的中心问题.

从数学上而言，因为平面嵌入 $\mu(G)$ 已知，由上一节所讨论的, 在这里我们只要研究求一个多边形的最短砌合就够了. 当然，这个多边形不必限定为凸的. 只是为了叙述上的方便才假定它是凸的. 由此，不难导出一般的情形.

设 $Pol=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是一个凸多边形和 $T_1(Pol)$ 为 Pol 的一个给定的砌合. 令 (a_i,a_j,a_k) 和 (a_j,a_k,a_l) 为带有一个单边 (a_j,a_k) 为公共边界的二三角形. 由 Pol 的凸性，四边形 (a_i,a_j,a_k,a_l) 也为凸的. 这样, 我们就可以从中去掉这条公共边 (a_j,a_k) 添加上 (a_i,a_l) 将 $T_1(Pol)$ 变为 $T_2(Pol)$. 将这种从 $T_1(Pol)$ 到 $T_2(Pol)$ 的变换称为在 $T_1(Pol)$ 上作 *对角置换*. 一个从多面形 Pol, 任选一个节点为 a_1, 且连所有边 (a_i,a_1), $i=3,4,\cdots,n-2$, 而得到的砌合被称为 *标准砌合*. 其中，节点 a_1 称为它的 *基点*. 当然，任何一个凸多边形，对任何一个节点为基点均有一个标准砌合. 用 $T_{st}(Pol)$ 表示 Pol 的标准砌合.

引理 13.2.1 *任何一个凸多边形 Pol 的任何一个砌合*

$T(Pol)$ 均可经过一系列的对角置换变为以任一选定节点为基点的标准砌合.

证 令 $Pol = (v_1, v_2, \cdots, v_s)$ 和 v_1 选定为基点. 当然, 这是不失一般性的. 如果在砌合 $T(Pol)$ 中, v_1 的次为 $s-1$, 则它本身就是所要求的标准砌合. 否则, 必有一个三角形面 (v_1, v_k, v_l), $2 \leq k < l-1 \leq s-2$, 在 $T(Pol)$ 中. 因为 (v_k, v_l) 并不是 Pol 上的边, 则在 $T(Pol)$ 中必还有另一个三角形 (v_k, v_t, v_l), $k < t < l$. 由 Pol 的凸性, 四边形 (v_1, v_k, v_t, v_l) 也是凸的. 经过对角置换 (a_k, v_l) 和 (v_1, v_t) 得 $T_1(Pol)$. 这时, 在 $T_1(Pol)$ 中, v_1 的次比在 $T(Pol)$ 中的次大 1. 由在 $T(Pol)$ 中 v_1 的次的有限性, 若 $T_1(Pol)$ 还不是标准的, 继续此过程, 直到得 Pol 的一个标准砌合. ▮

由引理 13.2.1, 我们可进一步看出以 v_1 为基点的标准砌合可以从 $T(Pol)$ 经过 $s-1-\rho(T; v_1)$ 次对角置换而得到. 其中, $\rho(T; v_1)$ 为 $T(Pol)$ 中节点 v_1 的次, Pol 为一个 s- 边形. 因为对角置换之逆也是对角置换, Pol 的任何一个砌合 $T(Pol)$ 均可由一个以 b 为基点的标准砌合 $T_{st}(Pol)$ 出发经过 $s-1-\rho\,(T; b)$ 次对角置换而得到. 其中, Pol 同样为一个 s- 边形.

引理 13.2.2 令 $T_1(Pol)$ 和 $T_2(Pol)$ 为一个 s- 边形 Pol 的二个砌合. 则, $T_1(Pol)$ 可以从 $T_2(Pol)$ 出发经过至多 $2s-2-\max_{1\leq i\leq s}(\rho(T_1, v_i)+\rho(T_2; v_i))$ 次对角转换得到.

证 由引理 13.2.1, $T_1(Pol)$ 可以从一个标准砌合 $T_{st}(Pol)$ 经过 $s-1-\rho(T_1, v)$ 次对角转换而得到. 其中, v 为基点. 同样地, $T_2(Pol)$ 可以从这个标准砌合经 $s-1-\rho(T_2; v)$ 次对角置换而得到. 由于 v 的选择的任意性, 总可取 v 为使得 $\rho(T_1, v_i)+\rho(T_2; v_i)$ 达到最大的那个 v_i. 从而, 即得引理. ▮

现在，我们再引进二个引理以便能基于对角变换求得平面上一个凸多边形的最短砌合.

引理 13.2.3 对于凸多边形 $Pol=(v_1,v_2,\cdots,v_s)$, $s\geq 4$, 存在一个节点 $v_i, 1\leq i\leq s$, 使得长度 $l(v_{i-1},v_{i+1})$ 不大于 $l(v_i,v_{i-2})$ 和 $l(v_i,v_{i+2})$ 中之最小者.

证 设 $i\neq 1$. 不失一般性，由对称性可以假设 $l(v_1,v_3)<l(v_s,v_2)$. 如果 $l(v_2,v_4)\geq l(v_1,v_3)$, 则 $i=2$. 否则，有 $l(v_2,v_4)<l(v_1,v_3)$. 用 v_2 代替 v_1, 重作上述过程. 由 s 的有限性以及对 Pol 的假设和凸性即可得到所要求的 v_i. ♮

一个节点，若在凸多边形上具有引理中所述的性质，则称它为*可切的*.

引理 13.2.4 在一个凸多边形 $Pol=(v_1,v_2,\cdots,v_s)$ 上，一个节点 v_i 是可切的当且仅当

$$l(v_{i-1},v_{i+1})\leq l(v_i,v_j). \tag{13.2.1}$$

其中，$j=i-2,i-3,\cdots,i+2$, 依在 Pol 上的循环序.

证 由于一个节点 v_i 的可切性仅是 (13.2.1) 中 $j=i-2$ 和 $i+2$ 之情形. 充分性显然.

反之，令 $Pol\langle v_i\rangle$ 为从 Pol 中去掉节点 v_{i-1},v_i 和 v_{i+1} 然后加直线段 (v_{i-2},v_{i+2}) 而得到的多边形，由 Pol 的凸性可知 $Pol<v_i>$ 亦为凸的. 这样，除 v_{i-1}, v_i 和 v_{i+1} 之外的所有节点均在由两个射线 (v_i,v_{i-2}) 和 (v_i,v_{i+2}) 与线 (v_{i-2},v_{i+2}) 的非 v_i 所在的侧围之区域之内. 这就意味 (13.2.1). 必要性得证. ♮

根据引理 13.2.3-4, 我们可以设计一个过程以求一个给定凸多边形之砌合. 为简便，假设在凸多面形 $Pol=(v_1,v_2,\cdots,v_s)$

中，任何两条直线段 (v_{i-1}, v_{i+1}) 和 (v_i, v_{i+2}) 均不等长，$i = 1, 2, \cdots, s$ 依循环序. 自然，这是不失一般性的. 并且，称之为非退化.

Ta–过程　在 *Pol* 上选择一个可切节点 v. 去掉 v 并且将 v 在 *Pol* 上的二个邻节点连一直线段得 *Pol*[v]. 若 *Pol*[v] 本身已经是一个三角形，则终止；否则，以 *Pol*[v] 代 *Pol* 继续上述过程.

由 *Pol* 的凸性，在上述过程中每次得到的 *Pol*[v] 也为凸多边形. 这一过程结束，由最后的三角形和所有去掉的边即导出 *Pol* 的一个砌合. 一个砌合 $T(Pol)$, 若在它上不能通过对角置换而得到更短的砌合，则称之为极小砌合.

定理 13.2.1　用 *Ta*– 过程，从一个凸多边形 *Pol* 所得的它的砌合是一个极小砌合.

证　由引理 13.2.1-4 和 *Ta*– 过程之定义，即可导出定理.

h

而且，用 *Ta*– 过程之变种，即如下的 *Tb*– 过程同样可以得到极小砌合.

Tb–过程　取一个可切的节点 v_i 使得 (v_{i-1}, v_{i+1}) 在预先确定的序中为最小者，并求得 *Pol*[v_i]. 若 *Pol*[v_i] 是三角形，则终止；否则，以 *Pol*[v_i] 代 *Pol* 重行上过程.

事实上，*Tb*– 过程是一类贪婪形的算法. 这时，不必约定非退化.

如果 *Pol* 是平面上的一个正多边形，可以看出用如上过程

所得的砌合为最短的. 但, 一般情形, 即使讨论几何上的距离也不一定成立. 最简单的例子就是凸五边形 $P_5 = ABCDE$ 使得 $l(AC) = l(AD) = 5$, $l(CE) = l(BD) = 5$ 和 $l(BE) = 4$. P_5 的最短砌合为 (A, C) 和 (A, B) 连同 P_5 的边界. 然, 用上述过程所得的 P_5 的砌合之长度比最短长度大 1.

下面, 我们提供一种求一个多边形的在组合上为最短的砌合的方法. 就是说所有的长度均用非负的权所代替.

令 $Tri(Pol)$ 为给定的多边形之上所有可能的三角形的集合. 我们引进一个图, 用 $G(Pol)$ 表示. 其节点集即 $Tri(Pol)$. 两个节点相邻当且仅当它们所代表的三角形有一条公共边. 一个节点, 若它所代表的三角形有二条边在 Pol 的边界上, 则称之为*终端*. 用 $G(Pol)$ 的所有终端组成的集合称为其节点集之*终端子集*. 或称为 $G(Pol)$ 的*终端集*.

对于一个 s- 边形 Pol, 在 $G(Pol)$ 中的一个有 s–3 条边的树. 若此树上所有节点的次均不超过 3 且它的所有显节点皆终端, 则称之为*可行的*. 令 $Ftr(Pol)$ 为 $G(Pol)$ 中所有可行的树组成的集合.

引理 13.2.5 *令 $Til(Pol)$ 为 Pol 的所有砌合的集合和 $Ftr(Pol)$ 为 $G(Pol)$ 中所有可行的树的集合. 则, 总有*

$$|Til(Pol)| = |Ftr(Pol)|. \tag{13.2.2}$$

证 首先, 由可行树的定义容易看出, 对任何 $Ti \in Til(Pol)$, 有唯一的可行树 $Tr \in Ftr(Pol)$, 其上的边与 Ti 中三角形面之公共边相应. 反之, 从 $Tr \in Ftr(Pol)$, 由它的每一边相应 Pol 内部的一条直线段, 所有这些直线段与 Pol 即可唯一地构成 Pol 的一个砌合 $Ti \in Til(Pol)$. 从而, 在 $Til(Pol)$ 与 $Ftr(Pol)$ 之间存在一个 1–1 对应. 即得引理. ♮

根据 $G(Pol)$ 的定义，我们可以局限于相应 $G(Pol)$ 之节点的三角形全在 Pol 的内部区域以适应于 Pol 本身非凸之情形. 在这种一般的情形，引理 13.2.5 仍保持成立.

定理 13.2.2 对于多边形 Pol(不一定是凸的), 在 $Til(Pol)$ 中求最短砌合的最小化问题与在 $Ftr(Pol)$ 中求一个最短可行树的问题等价. 即,

$$\min_{Ti \in Ti(Pol)} W(T_i) = \min_{Tr \in Ftr(Pol)} W(Tr). \tag{13.2.3}$$

其中, $W(Ti)$ 和 $W(Tr)$ 分别表示在 Ti 和 Tr 中所有边的权之和.

证 引理 13.2.5 的一个直接结果. ▯

虽然，在一个图中求具有给定度的最小树 (最短树) 从算法复杂性之角度绝非容易. 不过，在我们这里之情形，通过观察 $G(Pol)$ 的特殊性质，确能设计一个求最短可行树的有效算法. 由于要占用过多之篇幅在这里不允许详细讨论.

至此，我们已经看到求一个图的直线嵌入的最短砌合问题不管是几何上还是组合上均为多项式可解的. 即，有有效的算法，因为只要逐面求最短砌合就可以了. 又，面的数目是图的阶的线性函数. 从求一个面最短砌合之有效性即可达到了我们本节之初提出的目标.

§13.3 极少折数嵌入

我们这一节所关心的问题是所谓**折数最小化**. 即，求一个图 G 的纵横嵌入 $\gamma(G)$ 使得所有边上折数之总和为最小. 根据 §8.1 中所讨论的，我们这里只考察图 G 的一个平面嵌入 $\mu(G)$ 的纵横扩张的折数最小化. 自然， $\mu(G)$ 的最小折数扩张本身

一般而言是 G 的一个极小折数嵌入. 所谓 $\mu(G)$ 的 *最小折数扩张* 是它的这样一个纵横扩张 $\gamma_0(G)$ 使得其上边的折数之总和为最小.

引理 13.3.1　不存在任何平面嵌入 $\mu(G)$ 的最小扩张使得其中有一边含有之形结构(如图 8.2.5(a) 所示).

证　若引理不成立, 设 $\gamma_0(G)$ 为 G 的某平面嵌入 $\mu(G)$ 的最小折数扩张且有一边 e 含一个之形结构. 则, 用 §8.2 中之处理办法, 总可得一个纵横扩张 $\gamma_1(G)$ 使得除 e 的折数少 2 外其它边上的折数与在 $\gamma_0(G)$ 中相同. 这就与 $\gamma_0(G)$ 为最小折数扩张矛盾. ♮

这个引理告诉我们在最少折数扩张中, 如果有边带两个或更多的折, 则只能含工形结构如图 8.2.5(b) 所示.

对于一条边上的一个工形结构, 其上二个折之每个均与二个角关联: 一个为 $\frac{\pi}{2}$; 另一个为 $\frac{3\pi}{2}$. 由于两个与同一工形关联的 $\frac{\pi}{2}$ 角必落在同一个与此边关联的面中. 同样地, 两个 $\frac{3\pi}{2}$ 的角落在另一个面中. 这就允许我们定义一个工形之方向为由 $\frac{\pi}{2}$ 角所在的面指向 $\frac{3\pi}{2}$ 角所在的面. 容易看出, 若一边 e 没有之形结构且含有两个或以上工形, 则这些工形的方向均必为相同的. 这样, 我们就可以对于一个不含之形结构的纵横嵌入 $\gamma(G)$, 引进一个关联的图, 称之为 *广均衡图*, 并用 $\widetilde{Qui}(r)$ 表示. 令 V, E 和 F 分别为 $\gamma(G)$ 的节点集, 边集和面集. 则, $\widetilde{Qui}(r)$ 的节点集 $\tilde{V}$ 和边集 $\tilde{E}$ 依如下方式确定:

$$
\begin{cases}
\tilde{V} = V_+ + F; \\
\tilde{E} = \tilde{E}(V_+, F) + \tilde{E}(F).
\end{cases}
\tag{13.3.1}
$$

其中

$$\begin{cases} V_+ = \{v \mid \text{def}\,(v) > 0,\ v \in V\}; \\ \tilde{E}(V_+, F) = \{\prec v, f \succ \mid v \in V_+ \cap V(f), f \in F\}; \\ \tilde{E}(F) = \{(g, f) \mid E(f) \cap E(g) \neq \emptyset, f, g \in F\}. \end{cases} \tag{13.3.2}$$

在 $\widetilde{Qui}(r)$ 上，我们进而选择子集 S 和 $T \subseteq \tilde{V}$ 如

$$\begin{cases} S = V_+ + F_-; \\ T = F_+, \end{cases} \tag{13.3.3}$$

其中，

$$\begin{cases} F_- = \{f \mid \text{res}\,(f) < 0,\ f \in F\}; \\ F_+ = \{f \mid \text{res}\,(f) > 0,\ f \in F\}. \end{cases} \tag{13.3.4}$$

并在 S 和 T 上赋以权如

$$\begin{cases} \forall s \in S, \quad a(s) = \begin{cases} \text{def}\,(s), s \in V_+; \\ -\text{res}\,(f),\ s \in F_-; \end{cases} \\ \forall t \in T, \quad d(t) = \text{res}_0(f). \end{cases} \tag{13.3.5}$$

引理 13.3.2 在广均衡图 $\widetilde{Qui}(r)$ 上，对于 (13.3.3) 所确定的 S 和 T 以及 (13.3.5) 所赋之权 $a(s), s \in S$ 和 $d(t), t \in T$，总有

$$\sum_{s \in S} a(s) = \sum_{t \in T} d(t). \tag{13.3.6}$$

证 引理 9.3.2 的一个直接结果. ▯

看上去，广均衡图和 §9.3 中均衡图一样．但在广均衡图 $\widetilde{Qui}(\gamma)$ 上，在 $\tilde{E}(V-,F)$ 中的所有边均为有向的而且有些节点与嵌入 γ 中的面有关．令 $b(e)$ 为边 $e\in E$ 上折的数目和 $b(A)$ 为 A 中所有边在嵌入 γ 中的折数之总和， $A\subseteq E$. 则，我们可以赋 $\widetilde{Qui}$ 的边 $e\in\tilde{E}$ 的权为

$$\lambda(e)=\begin{cases}\theta(A_e), & e=\prec v,f\succ\in\tilde{E}(V_+,F);\\ \\ b(e_{f,g}), & e=(f,g)\in\tilde{E}(f).\end{cases}\tag{13.3.7}$$

其中， θ 为由 (9.3.6) 所定义的角上的分配． A_e, $e=\prec v,f\succ$ 为 f 中在 v 处的角． $e=(f,g)\in E(f)\cap E(g)$, 即在 γ 中面 f 和 g 的公共边界上．

由 §9.3 中所讨论的，容易看出如下的关系式

$$\sum_{e\in\tilde{E}(v)}\lambda(e)=a(v),\quad v\in S.\tag{13.3.8}$$

其中， $\tilde{E}(v)$ 为 $\widetilde{Qui}$ 中与 v 关联的边的集合．和，

$$\sum_{e\in\tilde{E}(v)}\lambda(e)=d(v),\quad v\in T.\tag{13.3.9}$$

其中， $\lambda(e)>0$, $e=(f,g)\in\tilde{E}$ 被确定为在 f 和 g 的公共边界边上每一折处的方向为从 $\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{3\pi}{2}$; $-\lambda(e)$, 为在相反方向上的权．进而，我们还可论证

$$\sum_{e\in\tilde{E}(v)}\lambda(e)=0,\quad v\in\tilde{V}\setminus(S+T)=F_0.\tag{13.3.10}$$

其中， $F_0=\{f|\ \mathrm{res}\ (f)=0,\ f\in F\}$. 事实上， (13.3.10) 即可由多边形的内角和的关系得到．

与 §9.3 中所描述的相仿，我们也知道，对于任何 $e \in \tilde{E}$, $\lambda(e) = 0, 1$ 或 2 且满足 (13.3.8-9), 总可求得一个纵横嵌入没有之形结构且使得 $\lambda(e)$ 即为对此嵌入由 (13.3.7) 所确定者.

因为对于一个节点次不大于 4 的图的任一平面嵌入，我们总可构造它的广均衡图 $\widetilde{Qui}$. 若引进未知量 x_e, $e \in \tilde{E}$, 则如下的方程

$$\sum_{e \in \tilde{E}(v)} x_e = \begin{cases} a(v), & v \in S; \\ d(v), & v \in T; \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \tag{13.3.11}$$

必有一组非负解，且由引理 13.3.2 知满足条件

$$\forall e \in \tilde{E}(V_+, F), \quad x_e = 0, 1, \text{ 或 } 2. \tag{13.3.12}$$

引理 13.3.3 一个平面嵌入 $\mu(G)$ 的最少折数扩张可由其广均衡图 $\widetilde{Qui}(\mu)$ 上的方程 (13.3.11) 满足条件 (13.3.12) 使得

$$\sum_{e \in \tilde{E}(F)} x_e = \min! \tag{13.3.13}$$

的非负解构造出来.

证 由上面所讨论的可知，对于 $\mu(G)$ 的任何无之形结构的纵横扩张，方程 (13.3.11) 有一组非负解满足条件 (13.3.12). 由此可以构造出这个扩张. 必要性得证.

反之，对于 $\mu(G)$ 的方程 (13.3.11) 的任何一组满足 (13.3.12) 的非负解，也可以构造出一个无之形结构的纵横扩张. 这就是说由引理 13.3.1, 从方程 (13.3.11) 满足 (13.3.12) 的非负解可以得到最少折数的纵横扩张. 而且，由 (13.3.7) 可以看出，(13.3.13)

所示的最小值就是 $\mu(G)$ 的最少折数扩张中之总折数. 从而, 充分性得证. ‖

虽然, 方程 (13.3.11) 在约束 (13.3.12) 之下的相容性已经知道, 而且, 其每个非负解均可根据无之形结构的纵横扩张而得到, 由 §8.1 中所讨论的, 对于任一图 G 的平面嵌入 $\mu(G)$, 以 (13.3.7) 确定 $\tilde{E}$ 上的 $\lambda(e)$ 的方式总可得到一个无之形结构的纵横扩张. 然, 这里提供一种直接的方法求在限制 (13.3.12) 之下方程 (13.3.11) 的非负解.

首先, 在 $\widetilde{Qui}(\mu)$ 上选一个支撑树 T 使得 $v \in V_+$, $a(v) = 1$ 的节点为显节点. 容易证明, 这样的支撑树对于连通的图总存在. 然后, 限制在树 T 上求解方程. 事实上, 从 V_+ 中的显节点开始即可导致全树上方程之解. 由于 T 相应 $\widetilde{Qui}(\mu)$ 中循环空间上的一组基, 由引理 13.3.2, 在 T 上方程之解就是在 $\widetilde{Qui}(\mu)$ 上方程之解.

对于由上述过程所得的 $\tilde{E}$ 上方程 (13.3.11) 在 (13.3.12) 约束之下的一组非负解 $x_e = \tau_e$, $e \in \tilde{E}$, 定义 τ_e, $e = (u, v)$, 的 *正方向* 为从 u 到 v(或从 v 到 u) 根据 τ_e 是从在 u(或 v) 处之方程求出的. 当然, 若 $\tau_{(u,v)}$ 的正方向为从 u 到 v, 则 $\tau_e = \tau_{\prec u,v \succ} > 0$. 同时, $\tau_{(v,u)} = -\tau_{\prec u,v \succ} < 0$. 根据 (13.3.13), 可以在 $\widetilde{Qui}(\mu)$ 的边集 $\tilde{E}$ 上定义特征函数 ch 如下: $\forall e \in \tilde{E}$,

$$ch(e) = \begin{cases} 1, & e \in \tilde{E}(F); \\ 0, & \text{否则}. \end{cases} \tag{13.3.14}$$

对于 $\widetilde{Qui}(\mu)$ 上的一个圈 C, 令 $\tilde{E}_+(C, \tau)$ 和 $\tilde{E}_-(C, \tau)$ 分别为 C 上变量的值的方向为沿顺时针方向和逆时针方向的边的子集. 自然, 有 $\tilde{E}_+(C, \tau) \cap \tilde{E}_-(C, \tau) = \emptyset$. 其理由是 C 中的每一边, 其相

应变量的值至多有一个方向. 如果

$$\begin{cases} \sum_{\substack{e\in\tilde{E}_+(C;\tau)\\ \tau_l>0}} ch(e) \left(\text{或} \sum_{\substack{e\in\tilde{E}_-(C;\tau)\\ \tau_l>0}} ch(e)\right) \\ \qquad > \frac{1}{2}\sum_{e\in\tilde{E}(C)} ch(e); \\ \{e\in\tilde{E}(C)-\tilde{E}_+(C;\tau) \\ \qquad (\text{或 } \tilde{E}_-(C;\tau))|\tau_e=0\} \\ \qquad \cap\tilde{E}(V_+;R)=\emptyset, \end{cases} \tag{13.3.15}$$

则称 C 是可调的.

引理 13.3.4 对于一个平面嵌入 $\mu(G)$, 在 $\widetilde{Qui}(\mu)$ 上的方程 (13.3.11) 在约束 (13.3.12) 之下的非负解是最优的, 或者说达到了 (13.3.13) 所示的最小, 当且仅当在 $\widetilde{Qui}(\mu)$ 上对于这组解无可调圈.

证 用反证法证必要性. 假若对于 $\widetilde{Qui}(\mu)$ 上的一个最优解 $x_e=\tau_e$, $e\in\tilde{E}$, 有一个圈 C 是可调的, 则, 可以求出方程 (13.3.11) 的另一个满足 (13.3.2) 的非负解 $x_e=\hat{\tau}_e$, $e\in\tilde{E}$, 如下:

$$\hat{\tau}_e=\begin{cases} \tau_e-\delta,\ e\in\tilde{E}_+(C,\tau); \\ \tau_e+\delta,\ e\in\tilde{E}(C)\setminus\tilde{E}_+(C,\tau); \\ \tau_e,\ e\notin\tilde{E}(C). \end{cases} \tag{13.3.16}$$

其中,

$$0<\delta\le\min\{\tau_e|\ e\in\tilde{E}_+(C,\tau)\}. \tag{13.3.17}$$

不管怎样，对于这组解，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{e\in\tilde{E}(F)}\hat{\tau}_e &= \sum_{e\in\tilde{E}} ch(e)\hat{\tau}_e \\ &= \sum_{e\in\tilde{E}} ch(e)\tau_e - \delta\Big(2\sum_{e\in\tilde{E}_+(C,\tau)} ch(e) \\ &\quad - \sum_{e\in\tilde{E}(C)} ch(e)\Big) \\ &< \sum_{e\in\tilde{E}} ch(e)\tau_e = \sum_{e\in\tilde{E}(F)} \tau_e.\end{aligned}$$

这就与 τ_e, $e\in\tilde{E}$, 的最优性矛盾.

用线性规划的原则 [Dan1] 证明充分性. 因为这里所讨论的问题与线性规划问题等价. 而且，圈的不可调整恰相应线性规划中之最优准则. 从而，充分性得证. ♮

事实上，我们可以如上所述在任意选定的 $\widetilde{Qui}(\mu)$ 的一个支撑树 $\tilde{T}$ 上求方程 (13.3.11-2) 的非负解. 可以证明这一个解就是相应的线性规划的一个基础可行解. 而且，用 (13.3.16) 的方法调整得到的解 $\hat{\tau}_e$, $e\in\tilde{E}$, 也是这个线性规划问题的一个基础可行解. 这是因为我们可以只在对于 $\tilde{T}$ 的基本圈上进行调整. 由于线性规划的最优解总是可以在基础可行解上达到，即可得如下的

引理 13.3.5 对于 ν 阶图 G 的一个平面嵌入 $\mu(G)$, 在 $\widetilde{Qui}(\mu)$ 上方程 (13.3.11-13) 的非负最优解总可从 $\widetilde{Qui}(\mu)$ 上的一个树用上述过程得的一个非负解至多通过 $O(\nu)$ 次在可调圈上的调整而求得.

证 因为如 §3.2 中所讨论的，任何一个圈在循环空间中

总可表示对于某支撑树的基本圈之和. 且, 在两个圈 C_1 和 C_2 的公共边的子集中, 任何一条边 e 对于一组解 $x_e = \tau_e$, $e \in \tilde{E}$, 若 $e \in \tilde{E}_+(C_1, \tau)$ 则 $e \in \tilde{E}_-(C_2, \tau)$ 或反之. 按照通常的推算, 即可知在 $\widetilde{Qui}(\mu)$ 上有一个可调圈, 当且仅当它有一个基本圈是可调的. 当然, 这里不依赖那个支撑树的选择. 从而, 为得到最优解, 需要调整可调圈的数目至多为基本圈数. 由 G 的平面性和 (13.3.1) 可知基本圈数为 $O(\nu)$, 即得引理. ♮

令 $C^* = (e_1, e_2, \cdots, e_l)$ 为一个无之形结构的纵横嵌入 $\gamma(G)$ 上的一个上圈和 $C = (f_1, f_2, \cdots, f_l)$ 为在 $\gamma(G)$ 的对偶中与 C^* 相应的圈. 当然, $f_1, f_2, \cdots, f_l$ 可视为 $\gamma(G)$ 的面. 且, 有关系

$$e_i \in E(f_i) \cap E(f_{i+1}), \tag{13.3.18}$$

$i = 1, 2, \cdots, l$, $f_{l+1} = f_1$. 如果一条边 e_i, $1 \le i \le l$, 有一个端点处在 f_i 中的角不是 $\dfrac{\pi}{2}$, 则称之为*从的*; 否则, *主的*. 如果一条边 $e_i (1 \le i \le l)$, 不一定是主的, 有一折处在 f_i 中的角为 $\dfrac{3\pi}{2}$, 则称它对于 C^* *为主向的*. 一个上圈, 若它的主向边的数目大于其主边与主向从边数目之半, 则称它为*超载上圈*. 容易验证, 任何最少折数嵌入均不会有超载上圈.

定理 13.3.1 *一个平面嵌入 $\mu(G)$ 的无之形结构的纵横扩张 $\gamma(G)$ 若无超载上圈, 则它不是最少折数扩张当且仅当在 $\gamma(G)$ 中存在一个上圈 C^* 使得其中对于折同向的边的数目大于 C^* 的边数之半.*

证 事实上, 是将引理 13.3.4 从对于 $\widetilde{Qui}(\mu)$ 换为对于 $\gamma(G)$ 的说法. ♮

从相应引理 13.3.5 的结果, 可以设计一个求平面嵌入 $\mu(G)$ 的最少折数扩张的更为有效算法. 其要旨是在 $\mu(G)$ 的一个无

之形结构的纵横扩张上对于上圈而不是在 $\widetilde{Qui}(\mu)$ 上对圈作调整.

§13.4 极小面积嵌入

一个图 $G=(V,E)$ 的纵横嵌入 $\gamma(G)$ 所占的 面积 在这里定义为在平面上覆盖 $\gamma(G)$ 的矩形面积的最小值. 这就建议我们求 $\gamma(G)$ 的水平和竖直直径以确定 $\gamma(G)$ 的面积.

对于一个纵横嵌入 $\gamma(G)$, 令 $V(Hor)$ 为 $\gamma(G)$ 中所有极大水平线段的集合. 和 $E(Hor)$ 为 $V(Hor)$ 中的元素对 (u,v) 使得在 $\gamma(G)$ 上存在一个面, 其边界与代表 u 和 v 的每条水平线段都有一公共点. 由此, 我们可以引进一个图, 记为

$$Hor(\gamma)=(V(Hor),E(Hor)). \tag{13.4.1}$$

并称之为 $\gamma(G)$ 的 横图.

引理 13.4.1 若将 $Hor(\gamma)$ 中的边的方向定义为从它的端点所表示的水平线段由低水平到高水平 (即 y- 坐标由小到大), 则有向图 $Hor(\gamma)$ 为一个无有向圈的图.

证 用反证法. 设 $(v_1,v_2,\cdots,v_s)$ 是 $Hor(\gamma)$ 上的一个有向圈. 则, v_i 的 y- 坐标 $y(v_i)$, $i=1,\cdots,s$, 必满足

$$y(v_1)<y(v_2)<\cdots<y(v_s)<y(v_1).$$

这就与 y- 坐标的传递性矛盾. ♮

如果引进一个新的节点 s 使得它的坐标小于 $V(Hor)$ 中所有节点的 y- 坐标. 并将 s 与 $Hor(\gamma)$ 的每一个源连一条边. 同时, 引进一个新节点 t 使得它的 y- 坐标大于 $V(Hor)$ 中所有节点的 y- 坐标. 并将 $Hor(\gamma)$ 的所有的汇均与 t 连有边. 这

样，所得的图记为 $\widetilde{Hor}(\gamma)$. 可见，它确定一个格. 且，任何一条在 $\widetilde{Hor}(\gamma)$ 上的最长的连 s 和 t 的路在 $Hor(\gamma)$ 上也是一条最长路. 因为在 $\widetilde{Hor}(\gamma)$ 上求最长路有有效的算法. 从而，求 $Hor(\gamma)$ 的最长路也有有效算法. $Hor(\gamma)$ 的最长路的长度被称为 $\gamma(G)$ 的 **纵直径** 且用 $d_{ver}(\gamma G)$ 表之.

相仿地，对于一个纵横嵌入 $\gamma(G)$, 我们还可以构造一个关联和图，用

$$Ver(\gamma) = \big(V(Ver), E(Ver)\big) \tag{13.4.2}$$

表示. 其中， $V(Ver)$ 为 $\gamma(G)$ 中所有极大竖直线段组成的集合. 和 $E(Ver)$ 为 $V(Ver)$ 中这样的节点对的集合使得其二个端点所代表的竖直线段同与 $\gamma(G)$ 中的某个面的边界具有公共点. 这时，称 $Ver(\gamma)$ 为 $\gamma(G)$ 的 **纵图**.

同样，边 $(u,v) \in E(Ver)$ 可以定义其方向为 u, v 所代表的竖直线段从较小 x- 坐标到较大的 x- 坐标. 从而， $Ver(\gamma)$ 也为一个有向图.

引理 13.4.2 一个纵横嵌入 $\gamma(G)$ 的纵图 $Ver(\gamma)$ 是一个无有向圈的有向图.

证 在引理 13.4.1 的证明中只要将那里的 y- 坐标用这里的 x- 坐标代替即得. □

因为 $Ver(\gamma)$ 也是一个无有向圈的图，和横图一样，也可以引进一个新的源 s 和一个新的汇 t 而得到图 $\widetilde{Ver}(\gamma)$. 当然， $\widetilde{Ver}(\gamma)$ 也表示一个格. 且， $\widetilde{Ver}(\gamma)$ 上的任何一条最长路在 $Ver(\gamma)$ 上的部分也是 $Ver(\gamma)$ 上的最长路. 在 $Ver(\gamma)$ 上最长路的长度被称为 $\gamma(G)$ 的 **横直径**. 并，用 $d_{hor}(\gamma G)$ 表示.

至此，我们知道， $\gamma(G)$ 的面积为

$$Ar(\gamma G) = d_{hor}(\gamma G) d_{ver}(\gamma G). \tag{13.4.3}$$

下面，我们讨论如何从一个纵横嵌入 $\gamma(G)$ 出发，经过在 $\gamma(G)$ 中的上圈上作调整以求得 $\gamma(G)$ 的一个极小面积嵌入.

因为从 §13.3 中知道，求一个平面嵌入的最少折数扩张可以有效地通过算法实现. 求一个平面嵌入的极小面积扩张可以只限制在这个嵌入的所有的最少折数扩张中进行.

这里的关键步骤在于求一个上圈使得从它经过一类运算可导出一个新的扩张具有较小的面积.

令 $C^* = (e_1, e_2, \cdots, e_s)$ 为 $\gamma(G)$ 中的一个上圈. $C = (f_1, f_2, \cdots, f_s)$ 为 $\gamma(G)$ 的平面对偶中与 C^* 相应的圈. 当然, f_i, $1 \leq i \leq s$, 相应 $\gamma(G)$ 的面. 且, f_i 和 f_{i+1} 的边界上的边的集合 $E(f_i)$ 和 $E(f_{i+1})$ 满足

$$e_i \in E(f_i) \cap E(f_{i+1}), \tag{13.4.4}$$

$i = 1, 2, \cdots, s$ 和 $f_{s+1} = f_1$. 如果 C^* 上主向边的数目等于主边的数目与主向非主边的数目之和之半，如 §13.3 中所述，或者沿 C^* 两个方向上折的数目之最大者为 C^* 中总边数之半，则称 C^* 为*折平衡的*. 在图 13.4.1 中， (a) 给出了一个纵横嵌入 $\gamma(G)$, 其中之虚点线表示上圈

$$C^* = (UW, RS, QL, NM, OM).$$

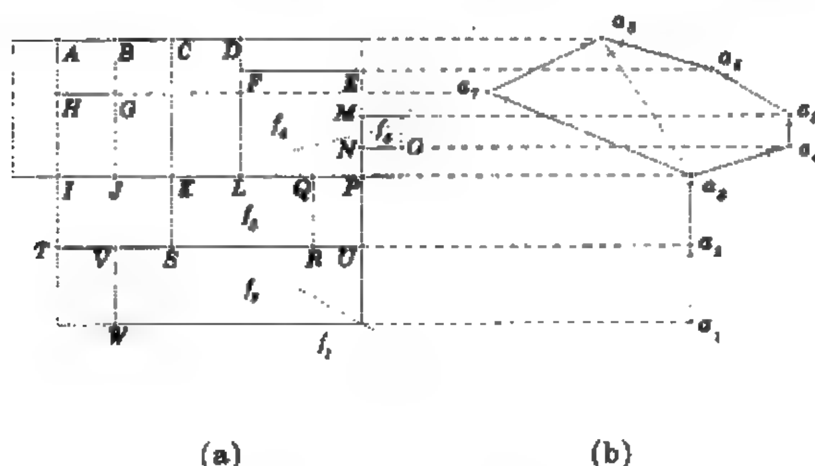
因为

$$UW,\ SR,\ QL,\ NM$$

全为从边, 仅 OM 是主的和 UM 为主向的. 可以验证 C^* 就是折平衡的. (b) 给出了 $\gamma(G)$ 的横图 $Hor(\gamma)$. 其中，最长路的长度为 6. 从而， $\gamma(G)$ 的纵直径为 6.

为了描述在一个纵横嵌入的一个上圈上的变换，我们要观察纵横嵌入与平面直线嵌入所关联角的系统的关系.

令 $\mu(G)$ 为一个平面嵌入，其上有些边上有附加的 2- 节点. 和，令 $A(\mu G)$ 为与通常节点关联的角的集合与 $B(\mu G)$ 为同附加节点 (2- 节点) 关联的角的集合. 则，一个图 G 的任何一个直线嵌入 $\mu(G)$ 在某些边上带附加 2- 节点均确定了一个角的系统 $\{A(\mu G), B(\mu G)\}$. 然而，反之，一般自不成立.



(a) (b)

图 13.4.1

引理 13.4.3 一个图 $G=(V,E)$ 的平面嵌入 $\mu(G)$, 带有附加 2- 节点在某些边上且不含显节点，其角系统 $\{A(\mu G), B(\mu G)\}$ 确定一个纵横嵌入，当且仅当它满足如下条件：

An1 $\{A(\mu G), B(\mu G)\}$ 的每个角只可能取值 $\frac{\pi}{2}$, π, 或 $\frac{3\pi}{2}$;

An2 在每个节点 v(包括附加节点) 处，有

$$\sum_{A\in \bar{A}_v(\mu G)} A = 2\pi. \qquad (13.4.5)$$

其中，$\bar{A}_v(\mu G)$ 为 v 处所有 $A(\mu G)$ 和 $B(\mu G)$ 中角的集合；

An3 在每一个面 f 内，有

$$\sum_{A \in \tilde{A}_f(\mu G)} A = \left(\rho^*(f) - 2\right)_\pi. \qquad (13.4.6)$$

其中，$\tilde{A}_f(\mu G)$ 为面 f 内 $\mathcal{A}(\mu G) \cup \mathcal{B}(\mu G)$ 中角的集合和 $\rho^*(f)$ 为考虑附加节点在内的 f 的次.

证 通过验证一个图 G 的纵横嵌入是否满足 $An1-3$, 必要性是显见的.

充分性可由定理 9.3.1 导出. 其理由是只要把折视为附加的 2- 节点，一个图 G 的纵横嵌入就是图 G 加附加 2- 节点之后的网格嵌入. ∎

对于一个纵横嵌入 $\gamma(G)$, 令 $\tilde{A}(\gamma G)$ 为 $\gamma(G)$ 上所有包括折处在内的角的集合. 即,

$$\tilde{A}(\gamma G) = \mathcal{A}(\gamma G) + \mathcal{B}(\gamma G). \qquad (13.4.7)$$

若 $C^* = (e_1, e_2, \cdots, e_s)$ 为 $\gamma(G)$ 的一个上圈和 $C = (f_1, f_2, \cdots, f_s)$ 为在 $\gamma(G)$ 的平面对偶中与 C^* 相应的圈，则，若在 $\tilde{A}(\gamma G)$ 上作如下运算：$i = 1, 2, \cdots, s$,

A. 对于 e_i 是一个从边 (用 S 表示) 但非主向边，将这个与 e_i 关联的 f_i 内大于 $\frac{\pi}{2}$ 的角 $A_{f_i}(e_i, S)$ 改变为 $A_{f_i}(e_i, S) - \frac{\pi}{2}$;

B. 若 e_i 为主向边，则将 e_i 中相应的折去掉;

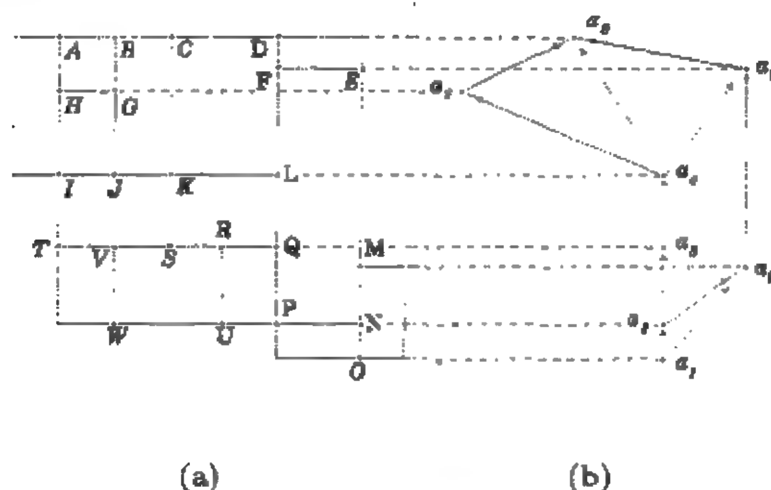
C. 若 e_i 为主的但非主向的，则在 e_i 上引进一个折使得在 f_{i+1} 内为 $\frac{3\pi}{2}$ 角,

就称之为对 C* 作单侧旋.

引理 13.4.4 若 $\tilde{A}'$ 为在纵横嵌入 $\gamma(G)$ 上对上圈 C^* 作单侧旋所得的角系统，则 $\tilde{A}'$ 必为另一个纵横嵌入 $\gamma'(G)$ 的角系统. 而且，$\gamma'(G)$ 的总折数与 $\gamma(G)$ 的相同当且仅当 C^* 是折平衡的.

证 通过验证 $\tilde{A}'$ 满足引理 13.4.3 中的条件 $An.1-3$ 即得第一个说法. 后一说法之必要性. 由于若 C^* 不是折平衡的, 则从 §13.3 中所讨论的 $\gamma'(G)$ 不可能与 $\gamma(G)$ 有相同的折数, 即可得. 反之, 由 C^* 的折平衡性, 通过单侧旋的运算在 $\gamma'(G)$ 引进之折数与在 $\gamma(G)$ 上去掉的折数相同. 从而, 可得充分性. ▮

在图 13.4.2 中, (a) 给出了纵横嵌入 $\gamma'(G)$. 它是由对图 13.4.1(a) 中虚点线所示的上圈 C^* 在 $\gamma(G)$ 上作单侧旋得到的. (b) 显示了 $\gamma'(G)$ 的横图 $Hor(\gamma)$. 由于 C^* 是折平衡的在 $\gamma'(G)$ 上的总折数与在 $\gamma(G)$ 上的相同. 然而, 这时 $\gamma'(G)$ 的纵直径比 $\gamma(G)$ 的少 1.



(a) (b)

图 13.4.2

若一条边 (u,v), 它的二个关联面为 f_1 和 f_2, 在纵横嵌入 $\gamma(G)$ 中有 $A_{u,f_1}\ge\pi$ 和 $A_{v,f_2}\ge\pi$ 或者反之, 则称 e 为可转的. 在 $\tilde{A}(\gamma g)$ 中的运算使得

$$\begin{cases} A'_{v,f_2}=A_{v,f_2}-\dfrac{\pi}{2}; \\ A'_{u,f_2}=A_{u,f_2}+\dfrac{\pi}{2}; \end{cases} \tag{13.4.8a}$$

$$\begin{cases} A'_{v,f_1} = A_{v,f_1} + \dfrac{\pi}{2}; \\ A'_{u,f_1} = A_{u,f_1} - \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{13.4.8b}$$

和所有其它的角不变被称为对于可转边 $e=(u,v)$ 作 *旋转*. 容易看出，旋转运算将一个纵横嵌入变换为另一个纵横嵌入使总折数不变. 但，可能改变它们之面积.

若一个上圈 C^*, 它在 $\gamma(G)$ 上是折平衡的，使对它作单侧旋而得到的 $\gamma'(G)$ 比 $\gamma(G)$ 面积小，则称 C^* 为 *面积可调的*.

当然，我们可以借助纵图与横图用 $\gamma(G)$ 的结构性质刻划一个上圈是面积可调的表征. 一个可转的边，若对它作旋转运算之后所得的纵横嵌入的面积比原来的小，也被称为 *面积可调的*. 这就建议我们在一个纵横嵌入上通过对于可调的上圈和边作上面的二类运算以便在保持总折数不变之下求得一个纵横嵌入的极小面积扩张.

进而，我们也可以通过推广对于折平衡上圈的可调性到非折平衡的情形以便求得允许增加约定限制的总折数之条件下的极小面积扩张，甚至最小面积扩张.

§13.5　注记

13.5.1　在 §13.1 中所述的求一个图的最优凸嵌入的方法可以看做为 Tutte [Tut15] 用于所有权皆取为 1 的情形的推广. 然而，在 Tutte 的文章中并未提及任何最优性之问题. 那时，他的目的在于表明凸嵌入的存在性.

13.5.2　对于平面上的一些给定的点，求以它们作为节点的最短三角剖分，不管是在几何上，即两节点之间的长度为欧氏距离，还是在组合上，即两节点间之长度为任何非负的权，都是很难的. 直到现在，即使几何的情形，一般而论比组合情

形会容易些，也没有发现有效的算法. 当平面上的这些节点形成一个凸多边形时，不管是几何上还是组合上，均是多项式可解的. 事实上，Dantzig, Hoffman 和胡德强 [DaHH1] 对此用线性规划提供了一个有效算法. 然而，在 §13.2 中，不仅对此也提供了另一个有效算法而且还多项式地解决了更广一些的问题.

13.5.3 与 §13.2 中所讨论的问题相仿地，还可以对于曲面或高维空间提出相应的问题. 然，在文献中尚未见到进一步之结果.

13.5.4 关于折数的最小化，或者从超大规模集成电路设计的角度通道最少化. 近年来，许多文章讨论各种模型. 其中，有 Tamassia 将求最少折数扩张的问题转化为网络流的问题 [Ta1]. 然而，在 § 13.3 中所讨论的可以看做是我国于五十年代在解运输问题时发现的图上作业法的一种发展 [Liu30]. 相关的一些问题还可见 [BN1], [BeH1], [CKC1], [Cle1], [DuZ1], [Kr1], [LL1], [Liu28], [RLW1] 等.

13.5.5 虽然一种与 §13.3 中所用的相仿的方法也可以来求一个平面嵌入的极小面积扩张，但，这时并不像那里那样有效. 其最小性和有效性尚待进一步研究. 当然，求一个图的最小面积嵌入与最少折数嵌入一样至少在计算复杂性方面是更为困难的. 很多文章致力于估计最小面积嵌入所占的面积之上界 [BL1] [Liu29]. 方法是用分离子定理 [LT1-2]. 然而，对于一些类型的图，最少折数嵌入中总折数的最小上界则是用另外的方法得到的 [LMP1], [LMPS1-2] 和 [LMS1-2]. 这种方法利于估计一些类型图的最小面积嵌入所占面积的上界，甚至最小上界也可以想象是很有希望的. 在 [Liu29] 中曾提出过这种想法.

第十四章

图和上图拟阵

§14.1 二分拟阵

在文献中，拟阵的等价定义屡见不鲜．我们这里把 *拟阵* 视为在一个有限集 E 上的一个子集族 $\mathcal{Z}$ 使得满足如下的二条公理：

公理 1 在 $\mathcal{Z}$ 中，任何一个成员均非另一个成员的真子集．

公理 2 令 a 和 b 为 E 中两个不同的元素．记 X 和 Y 为 $\mathcal{Z}$ 的两个成员使得 $a \in X \cap Y$ 和 $b \in X \backslash Y$．则，存在 $Z \in \mathcal{Z}$ 使得 $b \in Z \subseteq (X \cup Y) - a$．

其中，E 被称为 *基础集*．其元素称为 *胞腔*．E 的基数称为 *阶*．$\mathcal{Z}$ 中的成员称为 *圈*．$\mathcal{Z}$ 的基数称为 *度*．

一个拟阵，常用 $M = (\mathcal{Z}, E)$ 表示．当无需特别指出基础集时，简记为 M．两个拟阵 $M_1 = (\mathcal{Z}_1, E_1)$ 和 $M_2 = (\mathcal{Z}_2, E_2)$，如果存在一个双射 τ: $E_1 \to E_2$ 使得：$\forall C_1 = \{e_1, e_2, \cdots, e_s\} \in \mathcal{Z}_1$，

$$\tau(C_1) = \{\tau(e_1), \tau(e_2), \cdots, \tau(e_s)\} \in \mathcal{Z}_2, \qquad (14.1.1)$$

则称 M_1 与 M_2 是*同构的*, 并用 $M_1 \cong M_2$ 表示. 虽然, 只有一个元素的子集允许作为一个圈, 这时称之为*环*, 我们在这里不讨论带有环的拟阵. 因为环对于本章是无关紧要的.

令 $\mathcal{E}$ 为由集合 $\{e|\forall e \in E\}$ 在域 $\boldsymbol{F}$ 上生成的空间, 用 $\langle e|\forall e \in E\rangle$ 表示. 对于每个向量 $f \in \mathcal{E}$, 令 $E(f)$ 为 E 中相应 f 的非 0 分量之元素的子集. 有时, 如不引起混淆, 可用 f 本身代表 $E(f)$. 称 $E(f)$ 为 f 的*支柱*. 一个*整向量*, 即指在整数环上的向量群 $\mathcal{N}$ 中之向量. 自然, 一个整向量的所有分量皆整数. 一个整向量, 如果它的支柱对于 $\mathcal{N}$ 是极小的, 即在 $\mathcal{N}$ 中不存在整向量 $g \neq f$ 使得 $E(g)$ 为 $E(f)$ 的真子集, 则称之为*初等的*.

若 $\mathcal{E}$ 是二分的, 即在 $\boldsymbol{F} = GF(2)$ 上, 自然, 这时 $\mathcal{E}$ 是一个空间, 则容易验证, 子集族 $\mathcal{Z}(\mathcal{N}, 2)$, 即 $\mathcal{N}$ 中所有初等向量的集合, 形成一个拟阵. 用 $M(\mathcal{N}; 2)$ 表示. 任何一个拟阵, 若它与对于某个群 $\mathcal{N}$ 的 $M(\mathcal{N}; 2)$ 同构, 且 $\mathcal{N}$ 为二分空间 $\mathcal{E}$ 的一个子空间, 则也称之为*二分的*. 一般地, 取 $\boldsymbol{F}$ 为有理域或实域. 若一个初等向量, 对于整数环上的一个向量群 $\mathcal{N}$ 其所有的非 0 分量只取 $+1$ 或 -1, 则称它为*本原的*. 也易论证, 由 $\mathcal{N}$ 中的所有本原向量组成的集合, 或者说 E 的子集族, 同样形成一个拟阵, 用 $M(\mathcal{N})$ 表示. 如果一个拟阵与对于某正则群 $\mathcal{N}$, 即对于每一个初等向量均存在一个本原向量与它有相同的支柱的拟阵 $M(\mathcal{N})$ 同构则也称之为*正则的*. 因为对每一个本原向量, 存在一个初等向量与之有相同的支柱, 即可看出, 凡正则拟阵均为二分的.

引理 14.1.1 *若 $M = (\mathcal{Z}, E)$ 为一个二分拟阵, 则 $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{Z}$,*

$$\exists C_3 \in \mathcal{Z},\ C_3 \subseteq C_1 \bigoplus C_2. \tag{14.1.2}$$

其中, $C_1 \bigoplus C_2 = (C_1 \cup C_2) \setminus (C_1 \cap C_2)$ 被称为 C_1 与 C_2 之间的

对称差.

证 因为 M 是二分的，在二分空间 $\mathcal{E}$ 中存在一个子群 $\mathcal{N}$ 使得 M 与 $M(\mathcal{N};2)$ 同构. 因为向量

$$f = f(C_1) + f(C_2) \in \mathcal{N}$$

和

$$E(f) = C_1 \bigoplus C_2 \in \mathcal{Z}(\mathcal{N};2) = \mathcal{Z},$$

在 $\mathcal{N}$ 中有一个初等向量 f_0 使得 $E(f_0) \subseteq E(f)$, 从而， $C_3 = E(f_0)$ 即满足 (14.1.2). □

若 $M = (\mathcal{Z}, E)$ 是一个二分拟阵, 它与 $M(\mathcal{N})$ 同构，其中，$\mathcal{N}$ 为二分空间 $\mathcal{E}$ 中的一个 Abel 群，亦即子空间，则，对于 $\mathcal{E}$ 中 $\mathcal{N}$ 的正交子空间 $\mathcal{N}^{\perp}$, 那些与 $M(\mathcal{N}^{\perp})$ 同构的拟阵被称为 M 的对偶拟阵, 并用 $M^* = (\mathcal{Z}^*, E)$ 表示. $\mathcal{Z}^*$ 中之成员被称为上圈. 当然，$\mathcal{Z}^*$ 也是二分的.

引理 14.1.2 若 M 是一个二分拟阵和 M^* 为它的对偶，则，$\forall C \in \mathcal{Z}, C^* \in \mathcal{Z}^*$,

$$|C \cap C^*| = 0 \ (\mathrm{mod}\ 2). \tag{14.1.3}$$

证 由 $\mathcal{Z}$ 与 $\mathcal{Z}^*$ 的正交性，直接可得. □

对于拟阵 $M = (\mathcal{Z}, E)$, 若 E 的一个子集不含圈，则称之为*独立的*; 否则，*相关的*. 因为空集绝不含圈，故它是一个独立集. 而且，容易论证，一个独立集的任何一个子集也是独立的.

引理 14.1.3 对于二分拟阵 $M = (\mathcal{Z}, E)$, 令 C_1 和 C_2 为

二个不同的圈和 $A = C_1 \bigoplus C_2$. 则， $\exists C_1, C_2, \cdots, C_s \in \mathcal{Z} \ni$

$$A = \sum_{i=1}^{s} C_i. \tag{14.1.4}$$

其中，求和表示集合的不交的并.

证 设 M 与 $M(\mathcal{N})$ 同构且 $\mathcal{N}$ 为二分空间中之一子空间. 这时，$\mathcal{N}$ 的每一个非 0 向量均相应 E 的一个相关子集. 由引理 14.1.1, A 含一个圈 C_1. 因为向量 $f(A_1)$, $A_1 = A \bigoplus C_1$ 也在 $\mathcal{N}$ 中，故 A_1 也是 E 一个相关子集. 令 C_2 为 A_1 中的一个圈. 然后，若 $A_1 \bigoplus C_2$ 非空，则再取 $A_2 = A_1 \bigoplus C_2$ 代替 A_1 继续行此法. 由 E 的有限性，总能得到 (14.1.4). ♮

因为对于二个独立子集 X 和 Y, 若 $|X| = |Y| + 1$, 则存在 $x \in X \backslash Y$ 使得 $Y \cup x$ 也为独立子集，可以论证所有*极大独立子集*, 即它不是任何一个独立子集的真子集，均有相同的基数. 并称这个数为此拟阵之*秩*. 一个极大独立子集也被为一个*基础*, 用 $B(M)$, 或简单地 B 表示. 还可看出，对于 $e \notin B$, 在 $B \cup e$ 中恰有一个圈，与图的情形相仿地也称之为 M 对于 B 与 e 形成的*基本圈*. 并用 $C(B, e)$ 表之.

引理 14.1.4 对于二分拟阵 $M = (\mathcal{Z}, E)$, 令 B 是 M 的一个基础. 则，对于一个圈 C, $C \backslash B = \{e_1, e_2, \cdots, e_s\}$, 有

$$C = \bigoplus_{1 \le i \le s} C(B; e_i). \tag{14.1.5}$$

证 由第三章中所讨论的，若 M 与 $M(\mathcal{N}; 2)$ 同构，则对于一个基础的所有基本圈形成由群 $\mathcal{N}$ 所产生的子空间的一组基. 因为任何一个圈均为 $\mathcal{N}$ 中的一个向量，它用基中向量的线性组合的表示就给出了 (14.1.5). ♮

令 M 为一个拟阵，不必是二分的. 对于 E 的一个子集 S，令

$$\mathcal{L} = \{A | \forall A \in \mathcal{Z},\ A \subseteq S\} = \mathcal{Z} \cap S.$$

容易验证， $L = (\mathcal{L}, S)$ 为一个拟阵，并称之为 M 到 S 上的 约化，用 $L = M \cdot S$ 表示. 对于一个 $T \subseteq E$，令

$$\mathcal{P} = \{A | \forall C \in \mathcal{Z},\ A = C \cap T \neq \emptyset\}.$$

也易验证， $P = (\mathcal{P}, E)$ 同样是一个拟阵，并称它的 M 到 T 的收缩. 记 $P = M \times T$. 任何一个拟阵，若它具有形式 $(M \cdot S) \times T$，则称之为 M 的一个 子形. 可以看出，任何一个拟阵 M 之子形之子形仍为 M 的子形.

引理 14.1.5 二分拟阵的子形也是二分的.

证 由于在一个二元空间中的一个群上作相应的约化和收缩运算所得的仍为这个二元空间中的群，由二分拟阵之定义，即可得引理. ♮

并非任何拟阵均为二分的. 一个简单的非二分拟阵的例子就是 U (4,3)，即它的基础集由四个元素 a, b, c 和 d 组成和所有它的由三个元素组成的子集作为圈. 由于它的两个圈 $\{a, b, c\}$ 和 $\{a, b, d\}$ 的对称差 $\{c, d\}$ 不含任何圈，从引理 14.1.1 可知，$U(4.3)$ 不是二分的. 可以验证，它是阶和度为最小的非二分拟阵.

引理 14.1.6 对于任何二分拟阵 M，

$$\nexists S, T \subset E, \quad (M \cdot S) \times T \cong U(4.3). \tag{14.1.6}$$

证 引理 14.1.5 的一个直接结果. ♮

进而，所有这些概念，诸如独立性，上圈，基础，对偶性等如上所述均可从二分拟阵延伸到对于一般的拟阵. 对于拟阵 $M=(\mathcal{Z},E)$, 不必是二分的，E 的一个子集被称为 *独立的*, 如果它不含有 $\mathcal{Z}$ 中的圈. M 的 *基础* 就是 E 中的极大独立子集. 因为所有极大独立子集均有相同的基数，则称这个数为 M 的 *秩*. 若 E 的一个子集与 M 的任何一个基础均有非空的交而且无真子集也具有这一性质，则称之为对于 M 的 *上圈*. 同样，可以证明由 M 的所有上圈构成的 E 上的一个子集族 $\mathcal{Z}^*$ 也形成 E 上的一个拟阵. 它就是 M 的 *对偶拟阵*, 记为 $M^*=(\mathcal{Z}^*,E)$. 容易看出，$M^{**}=M$. M 的任何一个基础在 E 中之补为 M^* 的一个基础，也称之为 M 的 *上基础*, 记为 $\bar{B}(M)$, 或简单地 $\bar{B}$. 上基础的基数被称为 M 的 *上秩*. 因为一个上基础中的一个元素与相应的基础恰含有圈，也称这个圈为 *基本的*. 相仿地，每一个基础中的元素与相应的上基础恰含 M 的一个上圈，并称之为 *基本上圈*.

引理 14.1.7 对于一个拟阵 M, 不必是二分的，条件 (14.1.2-6) 是互相等价的. ▯

由于篇幅所限，这个引理的完全证明建议读者参见 [Tut9, 10, 18], [Wel1] 和 [Whn1].

定理 14.1.1 一个拟阵 $M=(\mathcal{Z},E)$ 是二分的，当且仅当条件 (14.1.2-6) 中之一满足.

证 由引理 14.1.1-4 和引理 14.1.6-7 只要证明条件 (14.1.2-6) 之一对于 M 为二分的是充分的就够了. 这里，我们仅取条件 (14.1.5). 若将 E 的一个子集 S 用 $GF(2)$ 上的向量 $f(S)$ 表示使得 f 的一个分量为 1, 当且仅当相应的元素在 S 中. 则，集合间之对称差就是相应向量间的加法 (mod 2) 运算. 因为条

件 (14.1.5) 提供了 M 中的圈作为基本圈之线性组合的表示. 这样，若将 M 的基本圈所相应的向量为基扩张成为子空间 $\mathcal{N}$. 自然，它是二分空间 $\mathcal{E}$ 中的一个 Abel 群. 由拟阵的公理 2, 所有初等向量为 $\mathcal{Z}$ 中的圈. 从而，$M=(\mathcal{Z},E)\cong M(\mathcal{N};2)$. 换言之，$M$ 是二分的. ♮

引理 14.1.8　一个拟阵 M 是二分的，当且仅当它的对偶 M^* 是二分的.

证　事实上，M 和 M^* 分别由 $\mathcal{E}$ 中的两个互为正交的子空间 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{N}^\perp$ 所产生的. 从而，引理成立. ♮

由引理 14.1.8 和定理 14.1.1, 我们即可得

定理 14.1.2　一个拟阵 $M=(\mathcal{Z},E)$ 是二分的，当且仅当下面的条件之一满足:

(1)　对于 M 的任何二个上圈 C_1^* 和 C_2^*, 存在一个上圈 C_3^* 使得 $C_3^*\subseteq C_1^*\bigoplus C_2^*$;

(2)　对于任何二个上圈 C_1^* 和 C_2^*, 它们的对称差可以表示为 M 中上圈之不交的并;

(3)　对于一个上基础 $\bar{B}=\{e_1,e_2,\cdots e_s\}$, 任何上圈均可表示为基本上圈之对称差;

(4)　M 的对偶拟阵 M^* 没有子形与 $U(4,3)$ 同构. ♮

事实上，可以看到 $\{a,b,c,d\}$ 中的任何二个元素成的子集均为 $U(4,3)=(\{abc,abd,acd,bcd\},\{a,b,c,d\})$ 的一个基础. 而且，也是一个上基础. 这就是说 $U(4,3)=U^*(4,3)$. 一个拟阵，若它的对偶拟阵与它本身同构则称之为自对偶的. 这样 $U(4,3)$ 就是一个自对偶的拟阵.

§14.2 正则性

一个拟阵 $M=(Z,E)$ 称为在域 F 上是*可表示的*, 如果存在一个双射 $\tau:E\to V$ 使得保持线性独立性. 其中, V 是 F 上的向量子空间. 对于拟阵 M, 若存在一个域使得 M 在此域上是可表示的, 则称 M 为*可表示的*.

引理 14.2.1 令 $\mathcal{N}$ 为 E 上对于整数环的一个正则群. 则, 对于任何整向量 $f\neq 0, f\in\mathcal{N}$, 存在与 f 有相同支柱的本原向量 $f_1,f_2,\cdots,f_s$ 使得

$$f=\sum_{i=1}^{s}f_i. \tag{14.2.1}$$

证 令 $\mathrm{sum}(a)=\sum_{e\in E}|u(e)|$, 其中 $u\in\mathcal{N}$ 为一个向量. 假若引理非真, 则可以取 f 为那些不满足引理使 sum 达到最小的向量. 设 g 为与 f 有相同支柱的本原向量. 记 $h=f-g$. 当然, 若 $h=0$, 则 $f=g$. 这说明 f 满足引理. 故, $h\neq 0$. 由正则性, 有

$$\mathrm{sum}\ (h)<\ \mathrm{sum}\ (f)$$

和 $E(h)=E(f)$. 从而, h 为本原向量之和并且这些本原向量与 f 有相同的支柱. 这又导致 f 满足引理. 与 f 的选择矛盾. 从而, 引理得证. ♮

对于一个整数 $p\geq 2$, 若一个整向量 f, 它的每个分量之绝对值均小于 p, 则它被称为对 p *是标准的*.

引理 14.2.2 令 $\mathcal{N}$ 是 E 上的正则群. 则, 对于每个 $q\geq 2$ 和每个整向量 $g\in\mathcal{N}$, 存在一个整向量 f 使得 $f=g\ (\mathrm{mod}\ q)$.

证 对于一个整向量 j, 令 $n_q(g)$ 为元素 $e\in E(g)$ 且

$|j(e)| \geq q$ 的数目. 可以取一个整向量 f 使得

$$n_q(f) = \min\{n_q(g) | j = g \pmod q\}.$$

若 $n_q(f) > 0$, 设 $|f(a)| \geq q$, $a \in E$. 由引理 14.2.1, 令本原向量 h, $E(h) = E(f)$ 和 $h(a) \neq 0$. 记

$$f_1 = f - gh.$$

由 $|f_1(a)| < |f(a)|$ 和 $f(a) < q \Rightarrow f_1(a) < q$, 有

$$n_q(f_1) \leq n_q(f).$$

且，其中之等号成立当且仅当 $f_1(a) \geq q$. 如果这样，可以用 f_1 代 f 再行此过程. 由 $f(a)$ 的有限性，总可找到 f' 使得

$$n_q(f') < n_q(f).$$

与 f 的选择矛盾. 从而，引理成立. ♮

引理 14.2.3 令 $M = (\mathcal{Z}, E)$ 为一个正则拟阵. 则，对任一素数 p, 存在 E 上的一个对于 $GF(p)$ 的正则群 $\mathcal{N}$ 使得 $M = M(\mathcal{N})$. 其中， $GF(p)$ 是特征数为 p 的域.

证 因为 M 是正则的，则在 E 上存在一个对于有理域的正则群 $\mathcal{N}'$ 使得 $M = M(\mathcal{N}')$. 对每个 $f' \in \mathcal{N}'$, 令 f 为依如下方式定义的对于 $GF(p)$ 的向量：

$$f(a) = f'(a) \pmod p, \ \forall a \in E. \tag{14.2.2}$$

可以看出，对于所有 $f' \in \mathcal{N}'$ 的满足 (14.2.2) 的标准向量 f 的集合 $\mathcal{N}$ 形成 E 上对于 $GF(p)$ 的一个群. 下面，我们证明 $M'(\mathcal{N}') = M(\mathcal{N})$.

令 $C' \in \mathcal{Z}$. 由 $M = M(\mathcal{N}')$, 存在一个本原向量 $h' \in \mathcal{N}'$ 使得

$$E(h') = C'.$$

现在，考察与 h' 相应的标准向量 h. 自然， $E(h) = C^*$. 这就是说 C' 在 $M(\mathcal{N})$ 中是相关的. 因此，在 $M(\mathcal{N})$ 中存在一个圈 C 使得 $C \subseteq C'$.

另一方面，令 C 是 $M(\mathcal{N})$ 中的一个圈. 则，有一个向量 $f \in \mathcal{N}$ 使得

$$E(f) = C.$$

然，这就是说存在 $f' \in \mathcal{N}'$ 使得 $C \subseteq E(f')$. 若 $a \in E(f')\backslash C$, 则 $f'(a) = 0 \pmod p$. 但这时，由引理 14.2.2, 存在一个标准向量 h' 使得

$$E(h') = E(f) = C.$$

换句话说， C 在 $M(\mathcal{N}')$ 中是相关的. 从而，在 $M(\mathcal{N}')$ 中存在一个圈 C' 使得 $C' \subseteq C$.

综上两个方面，即知 $M(\mathcal{N}) = M(\mathcal{N}')$. 这就得到了引理.

$\natural$

引理 14.2.4 若一个拟阵 M 是正则的，则 M 对任何域均为可表示的.

证 由正则拟阵的定义，自然，它对于有理数域是可表示的. 因此，对于特征数为 0 的域是可表示的. 进而，由引理 14.2.3 知 M 对于 $GF(p)$ 是可表示的. 从而，对于特征数为 p 的域，它均为可表示的. 根据域对于特征数之分类，即可得引理. $\natural$

令 $D(M)$ 为拟阵 $M = (\mathcal{Z}, E)$ 的关联矩阵. 它的行对应 $\mathcal{Z}$ 中之圈和列为 E 中之元素. 并称之为 M 的 **圈矩阵**. 对偶地，

可知上圈矩阵, 用 $D^*(M)$ 表示. 也就是说, M 的上圈矩阵即它的对偶拟阵 $M^*=(Z^*,E)$ 的圈矩阵. 从而, 有

$$D^*(M)=D(M^*). \tag{14.2.3}$$

对于二分拟阵 M, 若能够将负号分配到矩阵 $D=D(M)$ 和 $D^*=D^*(M)$ 的元素上使得对整数环,

$$DD^{*^T}=0, \tag{14.2.4}$$

则称 M 为*可定向的*.

引理 14.2.5 *若拟阵 M 是正则的, 则它必为可定向的.*

证 因为 E 上的拟阵 M 是正则的, 必存在一个整向量的群 $\mathcal{N}$ 使得 $M=M(\mathcal{N})$. 对于 M 的一个圈 C, 有一个本原向量 $f\in\mathcal{N}$ 使得 $E(f)=C$. 在 M 的圈矩阵 D 中相应 C 的行根据 f 的分量为 $+1$ 或 -1 分配此行中相应的元为 $+$ 或 $-$. 用相仿地规则给上圈矩阵 D^* 的元素分配符号. 即, 给对偶拟阵 $M^*=M(\mathcal{N})^*$ 的圈矩阵的元素用同样规则给以符号. 由于向量群 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{N}^*=\mathcal{N}^\perp$ 的正交性可知 D 和 D^* 的如上的符号分配使得满足 (14.2.4). 从而, 即得引理. ♮

对于一个二分拟阵 M, 令 B 为它上的一个基础. 这时, M 的对于基本圈和 E 中元素的关联阵被称为它的*基本矩阵*. 相仿地可知, M 的*上基本矩阵*就是它们对偶拟阵 M^* 的基本矩阵. 当然, 这时之基本圈是对于 M^* 上的基础 $\bar{B}=E-B$ 而言. 一个有理域上的矩阵, 如果它的所有子方阵的行列式只取 $0, 1$, 或 -1, 则称之为*全单模的*.

引理 14.2.6 *若拟阵 M 为正则的, 则对于任何一个基础, 其基本矩阵是全单模的.*

证 由正则性和引理 14.2.1, 允许我们只讨论正则空间中由本原向量组成的基的相应基本矩阵的正则性.

为方便，令 $J(S,T)$, $S \subseteq \bar{B}$, $T \subseteq B$, $|S| = |T|$, 为对于基础 B 的基本矩阵 $J(B)$ 的子矩阵使得它的行为相应 S 中元素与 B 形成的基本圈和列为与 T 的元素相应的. 若 $\det J(S,T) \neq 0$, 则可以看出矩阵 $J(B)$ 可以通过置换行，将一行乘以 -1 加到另一行上和将一行乘以 -1 这三种运算被变换为矩阵 $J(B')$, 其中 $B' = (B \setminus T) \cup S$. 这就是说存在一个非异矩阵 A, 其中元素为 0, 1 或 -1 使得

$$\det A \det J(S,T) = 1.$$

因为 $\det A$ 和 $\det J(S,T)$ 均为整数，只能 $\det J(S,T) = 1$ 或 -1. 由 B 以及 S 和 T 的选择之任意性，即得引理. ♮

一个二分拟阵 M, 若它的一个基本矩阵是全单模的，则称 M 也为全单模的. 由引理 14.2.6 的证明所示，只要有一个基本矩阵是全单模的，则必导致所有的基本矩阵皆全单模的.

一个二分的但非正则的拟阵的最简单的例子就是所谓 *Fano* 拟阵, 即其基础集由七个元素组成，记为 $\{e_1, e_2, \cdots, e_7\}$ 和圈的集合为

$$\{X_{126}, X_{135}, X_{247}, X_{234}, X_{257}, X_{367}, X_{456}\}.$$

其中， $X_{ijk} = \{e_t | 1 \leq t \leq 7, t \neq i, j \text{ 和 } k\}$, $1 \leq i < j < k \leq 7$.

上述 Fano 拟阵的非正则性，可以按如下方式证明. 因为易验证 $\{e_4, e_5, e_6, e_7\}$ 为它的一个基础. 这时，它的三个基本圈为 X_{234}, X_{135} 和 X_{126}. 其基本矩阵为

$$J(\{e_4,e_5,e_6,e_7\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 1 & 0 & x_{21} & 0 & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & 1 & x_{31} & x_{32} & 0 & x_{34} \end{pmatrix}.$$

其中， $x_{ij}=\pm 1, i \neq j, 1 \leq i,j \leq 4$. 假若此矩阵是全单模的. 由于下面四个子阵的行列式

$$\begin{pmatrix} x_{13} & x_{14} \\ x_{23} & x_{24} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{21}, & x_{24} \\ x_{31}, & x_{34} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} & x_{14} \\ x_{32} & x_{34} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & 0 & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

必需为偶数. 从全单模性又使得如下的方程对于所有未知量非 1 则 -1 有解:

$$\begin{cases} x_{13}x_{24} = x_{14}x_{23},\ x_{21}x_{34} = x_{24}x_{31}, \\ x_{12}x_{34} = x_{14}x_{32},\ x_{21}x_{32}x_{13} + x_{31}x_{23}x_{12} = 0, \\ x_{13}x_{24}x_{14}x_{23} = x_{21}x_{34}x_{24}x_{31} = x_{12}x_{34}x_{14}x_{32} = 1, \\ x_{21}x_{32}x_{13}x_{31}x_{23}x_{12} = -1. \end{cases}$$

然，这些方程将导致

$$
\begin{aligned}
-1 &= (x_{21}x_{32}x_{13}x_{31}x_{23}x_{12})x_{14}^2x_{24}^2x_{34}^2 \\
&= (x_{13}x_{24}x_{14}x_{23})(x_{21}x_{34}x_{24}x_{31})(x_{12}x_{34}x_{14}x_{32}) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

因此， Fano 拟阵不可能是全单模的．由引理 14.2.6 可知 Fano 拟阵是非正则的．

引理 14.2.7 若一个拟阵 M 是正则的，则 Fano 拟阵和它的对偶均非 M 的子形．

证 因为可以论证，一个正则拟阵的任何子形也是正则的，而且，用与引理 14.1.5 和引理 14.1.8 的证明相仿方法可得一个拟阵是正则的当且仅当它的对偶是正则的，由此，根据正则拟阵之定义以及上面对于 Fano 拟阵的讨论，即可得引理．

∎

对于一个二分拟阵 M，若在它的关于 $GF(2)$ 的基本矩阵没有一个子矩阵可以通过行间，或列间的置换而得到

$$
X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

或它的转置 X^T，则称 M 为 X–脱化的．

引理 14.2.8 若二分拟阵 M 是正则的，则它的基本矩阵在 $GF(2)$ 上是 X– 脱化的．

证 由于易看出， Fano 拟阵和它的对偶均非 X– 脱化

的. 根据 Fano 拟阵和它的对偶之非正则性，由引理 14.3.7 即可导出. ♮

引理 14.2.9 对于一个二分拟阵 M, 下面的说法是相互等价为:

(1) M 在任何域上均为可表示的;

(2) M 是可定向的;

(3) M 是全单模的;

(4) M 没有子形与 Fano 拟阵或其对偶拟阵同构.

(5) M 是 X- 脱化的. ♮

其证明留给读者或参考 [Tut10, Tut18, Wel1].

定理 14.2.1 一个二分拟阵 M 是正则的当且仅当在引理 14.2.9 的说法 (1–5) 中之一成立.

证 由引理 14.2.4–8, 必要性显然. 对于充分性，由引理 14.2.9, 只要对说法 (1) 证明 M 的正则性即是. 然而，由正则性之定义，这也是显然的. ♮

当然，如果将引理 14.2.9 的说法 (1–5) 中的所有 M 均用它的对偶 M^* 代替，这个定理即变为它的对偶形式.

§14.3 图性与上图性

对于一个图 $G = (V, E)$, 令 $\mathcal{R}(G)$ 为 E 在有理域上生成的空间，或记为 $\mathcal{R} = \langle e|\forall e \in E\rangle$. 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^{\perp}$ 均为 $\mathcal{R}$ 中的分别如 §3.1 中所述的循环和上循环这些整向量所形成的子空间. 进而，令 $Z(G) = M(\mathcal{C})$ 和 $Z^{\perp}(G) = M(\mathcal{C}^{\perp})$ 分别称为 G 的圈拟阵和上圈拟阵. 当然，易见 $Z(G)$ 和 $Z^{\perp}(G)$ 的子集族之成员分别为图 G 的圈和上圈.

引理 14.3.1　拟阵 $Z(G)$ 和 $Z^{\perp}(G)$ 皆二分的.

证　因为若将 $\mathcal{R}(G)$ 取为 $GF(2)$ 上的空间，则 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^{\perp}$ 分别为 §3.1 中所述的循环空间和上循环空间. 从而，由 §14.1 中的二分拟阵的定义即得引理. $\natural$

引理 14.3.2　对于一个图 $G=(V,E)$, 令 $Z^*(G)$ 为拟阵 $Z(G)$ 的对偶拟阵. 则， $Z^*(G)=Z^{\perp}(G)$.

证　由一个图的循环空间与上循环空间之正交性和 §14.1 中关于一个二分拟阵的对偶之定义，即可导出引理. $\natural$

引理 14.3.3　$Z(G)$ 和 $Z^{\perp}(G)$ 皆正则的.

证　由引理 14.3.2 和一个拟阵是正则的，当且仅当它的对偶是正则的. 只证明 $Z(G)$ 的正则性即足. 因为由引理 14.3.1 知 $Z(G)$ 是二分的， $Z(G)$ 子集族中的成员全可表示为 $GF(2)$ 上的向量. 可以赋与每边以一个方向，且对于 $C\in Z(G)$ 定义向量 $f=f(C)$: $\forall e\in E$,

$$f(e)=\begin{cases}1, & \text{若 } e\in C \text{ 且 } e \text{ 在 } C \text{ 上为顺时针方向;}\\ -1, & \text{若 } e\in C, \text{ 且 } e \text{ 在 } C \text{ 上为逆时针方向;}\\ 0, & \text{否则.}\end{cases}$$

因为任何上圈 $C^*\in Z^{\perp}(G)$ 均有形式：

$$C^*=(X,Y)=\{(x,y)|\forall x\in X,\forall y\in Y,\ (x,y)\in E\}.$$

其中， $Y=V-X$, $X\subseteq V$. 对于 $C^*\in Z^{\perp}(G)$, 定义向量 $f^*=f(C^*)$: $\forall e\in E$,

$$f^*(e)=\begin{cases}1, & 若\ e=(u,v)\in C^*\ 和\ u\in X, v\in Y;\\ -1, & 若\ e=(u,v)\in C^*,\ 和\ u\in Y, v\in X;\\ 0, & 否则.\end{cases}$$

根据 C 与 C^* 的正交性，有

$$\sum_{e\in E} f(e)f^*(e)=0.$$

从而， $Z(G)$ 是可定向的．由定理 14.2.1 即得引理． ▮

一个拟阵 M, 若存在一个图 $G=(V,E)$ 使得 $M\cong Z(G)$ 或 $Z^{\perp}(G)$, 则分别称 M 为*图的*或*上图的*. 对于一个拟阵 M, 若存在 $cor\ (M)+1$ 个圈 (一般地，循环) 使得 E 的每一个元素在这些圈中恰出现两次，则称 M 为*超上秩 2- 重可覆盖的*. 其中，$cor\ (M)$ 自然表示 M 的上秩．对偶地，若存在 $r(M)+1$ 个上圈 (一般地，上循环) 使得 E 中每个元素在这些上圈中恰出现两次，则称 M 为*超秩 2- 重可覆盖的*. 其中， $r(M)$ 为 M 的秩．当然，由对偶性， M 是超秩 2- 重可覆盖的当且仅当 M^* 是超上秩 2- 重可覆盖的.

引理 14.3.4 若 M 是一个图拟阵，则 M^* 为超上秩 2- 重可覆盖的.

证 因为 M 是图的, 有一个图 $G=(V,E)$ 使得 $M\cong Z(G)$. 其中， $Z(G)$ 为 G 的圈拟阵．令 $C^*(v)$ 为由与 $v\in V$ 关联的所有边形成的那个上圈 (一般地，上循环)．因为每一条边均与二个节点关联 (不考虑环的存在), 每条边恰出现在这些上圈 $C^*(v), v\in V$, 的二个之中．从而， M^* 是超上秩 2- 重可覆盖

的. 即得引理. ♮

对于一个二分拟阵 $M=(Z,E)$, 令 Cycl (M) 为由 Z 中的所有成员作为 E 的子集对 $GF(2)$ 生成的那个 E 上的向量空间, 并且, 称 Cycl (M) 为 M 的 *循环空间*. 在 E 上的一个子集族, 且每个子集均相应 Cycl (M) 中的一个向量, 如果 E 的每个元素均恰出现在此子集族的二个子集之中, 则称此子集族或相应地 Cycl (M) 的这些向量为 M 的一个 *二重覆盖*. 对于 M 的一个二重覆盖 $\mathcal{D}$, 令 Boun$(M;\mathcal{D})$ 为由 $\mathcal{D}$ 中所有子集所相应的向量生成的空间. 并称之为 M 的对于 $\mathcal{D}$ 的 *边缘空间*. 由二分性, 任何二分拟阵均有二重覆盖. 事实上, 为考虑到一般性, 在这里所说之子集允许重复的元素出现. 那个由 E 中所有元素组成且每个元素恰出现二次的子集本身就是 M 的一个二重覆盖. 此时, 这个子集相应 0 向量. 因为容易验证, 对任何二重覆盖 $\mathcal{D}$, Boun $(M;\mathcal{D})$ 总是 Cycl (M) 的一个子空间. 从而, 我们可以定义商空间

$$\mathcal{H}(M)=\text{Cycl }(M)/\text{ Boun }(M;\mathcal{D}) \tag{14.3.1}$$

为 M 的一个 *同调空间*.

引理 14.3.5 若 M 是一个图拟阵, 则 M^* 有一个同调空间 $\mathcal{H}(M^*)=0$.

证 设 M 与图 $G=(V,E)$ 的圈拟阵 $Z(G)$ 同构. 令 E_v 为 G 中所有与 $v\in V$ 关联的边的集合. 因为对任何 $e=(u,v)\in E$, 有 $E_u\cap E_v=e$, E 的子集族 $\mathcal{D}=\{E_v|\forall v\in V\}$ 为 M^* 的一个二重覆盖. 同样, M^* 为 M 的对偶. 由于对每个 $u\in V$,

$$\mathcal{D}\langle u\rangle=\mathcal{D}-E_u=\{E_v|\forall v\in V,\ v\neq u\}$$

为 Boun $(M^*;\mathcal{D})$ 上的一组基，即，$|\mathcal{D}(u)| = r(M^*)$. 从而，Cycl (M^*) =Boun $(M^*;\mathcal{D})$. 即得引理. ♮

由这个引理，我们可以看出上圈拟阵 $M^*(K_{3,3})$ 和 $M^*(K_5)$ 均不是图的. 其中，K_5 和 $K_{3,3}$ 分别为 5 阶完全图和 6 阶等部完全二部图. 其理由是可以证明，无论 $M(K_{3,3})$ 还是 $M(K_5)$ 均没有一个同调空间是平凡的. 事实上，这就是定理 3.2.5 的一个直接结果.

引理 14.3.6 图拟阵的子形也是图的.

证 令 M 是一个图拟阵. 设 M 同构于图 $G=(V,E)$ 的圈拟阵 $Z(G)$. 由于对任何 $S \subseteq E$, M 到 S 上的约化就是从 G 中去掉不属 S 的边所得图的圈拟阵. 对任何 $T \subseteq E$, M 到 T 的收缩为在 G 中将不在 T 中的边收缩之后所得图的圈拟阵. 从而，由子形之定义即得引理. ♮

引理 14.3.7 任何一个图拟阵均没有一个子形与 K_5 或 $K_{3,3}$ 的上圈拟阵同构.

证 由上面所述，我们已经知道 K_5 或 $K_{3,3}$ 的上圈拟阵均非图的. 由引理 14.3.6 即得引理. ♮

对于一个拟阵 $M=(Z,E)$, 如果 M 有一个基础 $B=\{e_1,\cdots,e_s\}$ 使得可以在 B 上定义一个序关系，也用 $\preceq$ 表示，且满足条件：

Cond. 1 在 B 中只有一个元素为最小的，即 B 中的任何其它元素均比它大；

Cond. 2 在每一个基本圈上，所有 B 中的元素形成一个线性序.

则称 M 为*确向可序的*.

对于一个确向可序的拟阵 $M=(Z,E)$, 我们可以引进 $GF(2)$ 上的变量 $y_e, e\in\bar{B}=E-B$, 与基本圈 $C(B;e)$ 相对应. 若两个元素 $a,b\in\bar{B}$ 使得 $C(B;a)$ 和 $C(B;b)$ 同时出现在下面三个构形 Conf. 1–3 之一中, 则称 a 和 b 是*相邻的*.

令 $h(e)$ 和 $t(e)$, $e\in\bar{B}$, 分别为 $B\cap C(B;e)$ 上最小元和最大元 (由确向可序性的 Cond. 2, 它们总是存在的). 对于 $a,b\in\bar{B}$, $C(B;a)\cap C(B;b)\neq\emptyset$ 而且 $h(a)\neq h(b)$, 我们可以假设 $h(a)\prec h(b)$ 而不失一般性.

Conf. 1 $\exists c\in\bar{B}$,

$$\begin{cases}(i)\quad h(c)\prec h(a)\prec h(b);\\(ii)\quad \langle t(a),\Lambda\rangle\prec\Lambda=\langle t(c),t(b)\rangle.\end{cases}$$

Conf. 2 $\exists c,d\in\bar{B}$,

$$\begin{cases}(i)\quad \max(h(c),h(d))\prec h(a)=h(b);\\(ii)\quad \langle t(c),t(a)\rangle=\Lambda_1\succ\langle\Lambda_1,\Lambda_2\rangle\\\qquad\qquad\prec\Lambda_2=\langle t(d),t(b)\rangle.\end{cases}$$

Conf. 3 $\exists c\in\bar{B}$,

$$\begin{cases}(i)\quad h(c)\prec h(a)\prec h(b);\\(ii)\quad \langle t(c),\Lambda\rangle\prec\Lambda=\langle t(a),t(b)\rangle.\end{cases}$$

在上面的叙述中，$\langle x,y\rangle = x\wedge y$, 即 $g.l.b.(x,y)$.

由 §5.4 中所讨论的，人们可以看出这里的 Conf. 1–3 分别与那里的类型 A, B 和 C 相应. 只要注意到这里的 a,b 和 c 分别相应那里 α,β 和 γ 即变成了相同的形式. 当然，这里的序与那里在节点集上的不同而是相当在边的子集上，即一个基础上. 这里之序被称为*确向序*. 当然，有效地判定一个拟阵之确向可序性和进而找到一个拟阵上的确向序不会出现多大的困难.

令 $\mathcal{A}$ 为一个拟阵不在某带有确向序的基础上的 E 中元素的相邻对的集合. 为简便，我们称带有确向序的基础为*确向基础*. 当然，不是任何基础均可定向为确向基础. 现在，我们建立 $GF(2)$ 上的方程：$\forall(a,b)\in\mathcal{A}$,

$$y_a+y_b=\begin{cases}1, & \text{若 } a,b \text{ 在 Conf. 1} \\ & \quad\text{或 Conf. 2 中;} \\ 0, & \text{否则，即 } a,b \\ & \quad\text{在 Conf. 3 中.}\end{cases} \tag{14.3.2}$$

并且，称之为这个拟阵的*临界方程*.

如果一个拟阵 $M=(Z,E)$ 是确向可序的而且其临界方程 (14.3.2) 有解，则称 M 是*相容的*; 否则，*不相容的*.

根据在 §5.4 中出现的相仿的理论，可以验证 K_5 和 $K_{3,3}$ 的上圈拟阵均为不相容的. 因此，由下面的引理 14.3.8 也易知它们均非图的.

引理 14.3.8 *若 $M=(Z,E)$ 是一个图拟阵，则 M 的对偶拟阵 M^* 是相容的.*

证　用反证法. 假设 M^* 是不相容的. 则，由 M^* 的确向

可序性 (不难证明, 留给读者), 可以将 M^* 视为某图的圈拟阵并取这个基础为其确向树. 由与引理 5.4.8 在此情之下的相仿的理由, 可以看出, M^* 有一个子形与 K_5 或 $K_{3,3}$ 的圈拟阵同构. 从而, M 有一个子形与 K_5 或 $K_{3,3}$ 的上圈拟阵同构. 由引理 14.3.7 可知 M 不是图的. 这就与引理的前提条件矛盾. ▮

进而, 我们还可以引进辅助图以便用与 §5.4 中所述相仿之方法确定一个拟阵是否为相容的.

引理 14.3.9 对于一个正则拟阵 M, 下面的说法是相互等价的:

(1) M^* 是超上秩 2- 重可覆盖的;

(2) M^* 有一个同调空间是平凡的;

(3) M 没有子形与 K_5 或 $K_{3,3}$ 的上圈拟阵同构;

(4) M^* 是相容的.

证 (1) $\Longrightarrow$ (2). 由 M^* 的超上秩 2- 重可覆盖性, 对于形成 M^* 的超上秩 2- 重覆盖的圈 (一般地, 循环) 的集合 $\mathcal{D}$, M^* 的边缘空间的秩与 M^* 的循环空间的秩 (维数) 相等. 从而, M^* 有一个同调空间为平凡的. 这就是 (2).

(2) $\Longrightarrow$ (3). 用反证法. 设 M 有一个子形与 $M^*(K_5)$ 或 $M^*(K_{3,3})$ 同构. 则, M 有子形与 $M(K_5)$ 或 $M(K_{3,3})$ 同构. 然而可以论证, 不管是 $M(K_5)$ 还是 $M(K_{3,3})$ 均没有一个同调空间是平凡的. 由具有平凡同调空间之遗传性, M^* 必也无同调空间是平凡的. 这就与 (2) 矛盾.

(3) $\Longrightarrow$ (4). 用反证法. 假设 M^* 是不相容的. 由确向可序性, M^* 与某图之圈拟阵同构. 当然, 这个图不会是可平面的. 这就意味 M 有一个子形与 $M^*(K_5)$ 或 $M^*(K_{3,3})$ 同构. 与 (3) 矛盾.

(4) $\Longrightarrow$ (1). 留给读者以免多占篇幅. ♮

定理 14.3.1 一个正则拟阵 $M=(\mathcal{Z},E)$ 是图的，当且仅当引理 14.3.9 中的说法 (1–4) 之一成立.

证 必要性直接由引理 14.3.4–8 得到. 由引理 14.3.9, 对于充分性只取一个说法即足. 也许取说法 (1) 是最简单的. 事实上，由 $M^*=(\mathcal{Z}^*,E)$ 的超上秩 2– 重可覆盖性，允许我们定义图 G 的节点为 $\mathcal{Z}^*$ 的在这个超上秩 2– 重覆盖集 $\mathcal{D}$ 中之圈，和边自然为 $\mathcal{D}$ 中有公共元的圈对. 由于 2– 重覆盖性，这些圈对与 E 中之元素 1–1 对应. 从而， G 的边集视为 E. 由 M 与 M^* 的正交性，有 $M\cong M(G)$, 即 G 的圈拟阵. 从而， M 是图的. ♮

引理 14.3.10 一个正则拟阵 M 是图的，当且仅当其对偶 M^* 是上图的.

证 由图和上图拟阵的定义，容易验证如下的形式

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\tau} & M^* \\ \iota\downarrow & & \downarrow\iota^* \\ M(G) & \xrightarrow{\tau'} & M^*(G) \end{array}$$

是可交换的. 其中， τ 和 τ' 确定相应的对偶性. 以及， ι 和 ι^* 确定相应的同构. 从而，引理成立. ♮

定理 14.3.2 一个正则拟阵 M 是上图的，当且仅当下面四个说法之一成立：

(1) M 是超上秩 2– 重可覆盖的；

(2) M 有一个同调空间是平凡的；

(3) M 没有子形与 K_5 或 $K_{3,3}$ 的圈拟阵同构；

(4) M 是相容的.

证 由对偶性，实为引理 14.3.10 和定理 14.3.1 的一个直接结果. ♮

由上面的两个定理，我们又即可得图的平面性的一个判准.

推论 14.3.1 一个图 G 是可平面的当且仅当它的圈拟阵是上图的，或者对偶地，它的上圈拟阵是图的. ♮

§14.4 注记

14.4.1 虽然有关线性和代数相关性的公理方法出现在范德瓦尔登于 30 年代出版的“现代代数学”的书中，由此可以看出有关拟阵之想法，然而，拟阵的理论基础如人们所熟知的是由 Whitney 奠定的 [Wht10]. 拟阵这个术语也是由他给出的. 不管怎样，对于当今的拟阵论的一个至关重要而且极为深入的发展确导源于 Tutte 于 50 年代所发表的一系列的文章 [Tut9–11]. 在 [Ku1] 中，收集了在拟阵理论方面的经典文章.

14.4.2 拟阵的正则性伴随着矩阵之全单模性. 由此也发展了矩阵的全单模性. 第一个提示了拟阵的正则性等价于 Fano 拟阵及其对偶出现与否作为子形的是 Tutte. 这里的理论基础是由他发现的有关拟阵的同伦定理 [Tut9–10]. 更进一步地，Seymour 将之发展到完全地解决了判定一般二元矩阵的全单模性的问题 [Sey4–5].

14.4.3 在 §14.3 中所定义的图和上图拟阵与 Tutte 的原来的定义有些不同 [Tut11]. 所差的只是将图与上图作了个交换，因为通常人们是这样的. 然，在理论上并无差异. 事实

上，这个理论表明任何关于图的平面性的判准均可以适当的方式转换来判定拟阵之图性和上图性 [Tut12, We8]. 不过，进行这种转换的关键一步在于将平面性判准中与节点的明显关系变换为非明显的. 事实上，在 §14.3 中提供了对于 §3.2 和 §5.4 中，或者在文章 [Liu1, 19, 22–23] 中的判准的这种变换. 这一理论也可用来判定几何格 [Sa1] 以及拟阵的单纯性 [Gr1–2].

14.4.4 关于拟阵理论的各方面的最新进展，可参见新著 [Whn1–3].

14.4.5 关于图的子形定理 [RS3] 以及有关问题，在拟阵理论中也会有相应的发展.

第十五章

纽结不变量

§15.1 纽结类型

一个 纽结(或 链), 用 K(或 L) 表示, 从数学上说就是圆 $C_0=\{x,y,0)|x^2+y^2=1\}$(或几个圆的无公共点的并) 在 3- 维空间 $\mathcal{R}^3$ 到它本身的同胚之下的象. 在图 15.1.1 中所给出的二个纽结是常见的也是最简单的. 在 (a) 中的那个被称为 上手结 或者说 三叶结. 而 (b) 中的那个为 八字结, 或称为 四结.

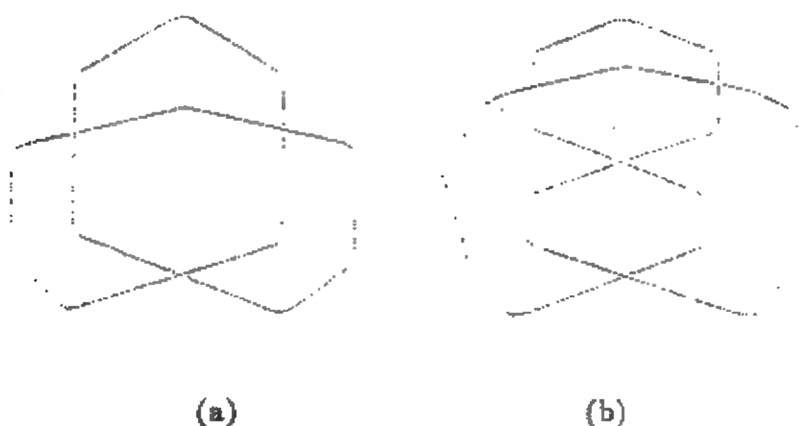


图 15.1.1

两个纽结 K_1 和 K_2, 若存在 $\mathcal{R}^3$ 到它本身的一个同胚将 K_1

映射到 K_2, 则称 K_1 与 K_2 是 *等价的*. 无庸置疑, 两个纽结间之等价确是一个等价关系. 等价的纽结视为同一个类型. 每个等价类被称为一个 *纽结类型*. 那些与圆本身等价的纽结被称为 *平凡的*. 所有平凡的纽结组成一个 *平凡类型*. 下面, 我们将会看到三叶结与四结属于不同的纽结类型. 若一个纽结由有限条直线段组成, 则称它为 *多边形的*. 其中线段的端点称为 *节点* 或 *顶点*. 这些直线段被称为 *边* 或 *棱*. 所有那些与多边形纽结等价的纽结被称为 *训的*; 否则, *野的*. 这样之区分是基本的, 因为我们这里所讨论的纽结均为训的.

一个纽结 K 在 *平行投影* $proj_0$: $\mathcal{R}_3 \to \mathcal{R}_2$ 使得

$$proj_0(x, y, z) = (x, y, 0) \qquad (15.1.1)$$

之下的象, 记为 $proj_0(K)$. 对于 $proj_0(K)$ 的任一点 p, 若 $proj_0^{-1}(p)$ 含 K 的多于一个点, 则称之为 *重点*. 一个点 $p \in proj_0^{-1}(K)$ 的 *阶* 就是集合 $proj_0^{-1}(p) \cap K$ 中的基数. 所谓 *二重点* 即指阶为 2 的点. 自然, *三重点* 就是阶为 3 的点.

一个纽结称为处于 *正位* 即指 $proj_0(K)$ 只有有限个重点而且每个重点均为如 §6.1 中所说的简单二重交叉. 因为可以想象任何纽结 (当然, 训的) 至多通过扰动总可使它处于正位, 我们总可假设纽结处于正位而不失一般性.

这样, 在正位的纽结投影象上的每一个重点均是 K 的二个点的象: 一个称为 *上交叉*; 另一个称为 *下交叉*.

一个拓扑空间 $\mathcal{X}$ 的 *同痕形变* 是这样的一族同胚 $h_t(0 \leq t \leq 1)$: $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 使得 h_0 为全同映射, 即 $h_0(p) = p, \forall p \in \mathcal{X}$ 和 $H(t, p) = h_t(p)$ 是对双变量 t 和 p 的连续函数. 两个纽结 K_1 和 K_2 称为在同一个 *同痕类型* 即指存在 $\mathcal{R}^3$ 上的一个同痕形变 $\{h_t | 0 \leq t \leq 1\}$ 使得 $h_1(K_1) = K_2$. 参数 t 可视为时间. 这样, 对一个固定的点 $p \in K_1 \subset \mathcal{R}^3$, 随着 t 的变化从 K_1 出发通过 p 的

轨迹，即一条路线达到 K_2.

容易验证，若两个纽结在同一同痕类型，则它们是等价的. 当然，一般而言，反之则不成立. 下面的关于定向的讨论用来解释这两个定义之不同.

一个同胚 $h:\mathcal{R}^3\to\mathcal{R}^3$，如果一个点带有顺 (逆) 时针走向的旋在 h 之下的象也是一个点带顺 (逆) 时针走向的旋，则称 h 为保定向的; 否则，逆定向的. 由 h 的连续性，每一个带一个固定的旋的点的邻域在 h 之下保持其象也是带相同的旋 (不计走向!) 的一个邻域. 由于 h 是一个同胚，$\mathcal{R}^3$ 中每一个点的象必属于两个无公共元的集合之一：一个是带有与 p 走向相同的旋；另一个则是带有与 p 走向不同的旋. 又，由 $\mathcal{R}^3$ 的连通性，这两个集合之中必有一个为空的. 从而，$\mathcal{R}^3$ 到它自身的一个同胚 h 是逆定向的，当且仅当每一个带顺 (逆) 时针走向旋的点的象为带逆 (顺) 时针走向旋之点.

令 H_+ 和 H_- 分别为 $\mathcal{R}^3$ 到它自身的保定向和逆定向同胚的集合. 则，我们即可看到两个同胚 h_1 和 h_2 的合成满足如下的规则：

$$\begin{cases} h_1h_2\in H_+ \iff (h_1\in H_+)\wedge(h_2\in H_+) \\ \qquad\qquad\qquad\quad \vee\ (h_1\in H_-)\wedge(h_2\in H_-); \\ h_1h_2\in H_- \iff (h_1\in H_+)\wedge(h_2\in H_-) \\ \qquad\qquad\qquad\quad \vee(h_1\in H_-)\wedge(h_2\in H_+). \end{cases} \tag{15.1.2}$$

当然，全同映射是保定向的. 另一方面，反射ref: $\mathcal{R}^3\to\mathcal{R}^3$ 使得

$$\text{ref }(x,y,z)=(x,y,-z) \tag{15.1.3}$$

则是逆定向的.

判定一个同胚 h 是保定向还是逆定向并不困难. 假若 h 是线性变换, 则自然其保或逆定向性分别由其相应矩阵之行列式为正或负所决定. 否则, 若 h 在某处是可微的, 则它的保或逆定向性分别由在这点处的 Jacobi 行列式的正或负而定.

引理 15.1.1 两个纽结 K_1 和 K_2 属于同一同痕类型, 当且仅当存在一个同痕形变 $h_t, 0 \leq t \leq 1$, 使得

$$h_1 \in H_+, \quad h_1(K_1) = K_2. \tag{15.1.4}$$

证 由同痕类型之定义, 充分性显然. 只证必要性. 由 h_0 总是保定向的, 即 $h_0 \in H_+$. 从 $H(t,p) = h_t(p)$ 的连续性可知所有 $h_t, 0 \leq t \leq 1$, 皆保定向的. 从而, 有 (15.1.4). ▯

对于一个纽结 K, 若存在 $\mathcal{R}^3$ 到它自身的一个逆定向的同胚 h 使得 $h(K) = K$, 则称 K 为*双旋的*. 对于由 (15.1.3) 所定义的反射 ref, K 的象 ref (K) 被称为 K 的*镜象*.

引理 15.1.2 一个纽结 K 是双旋的, 当且仅当

$$\exists h' \in H_+, \quad h'(K) = \text{ ref } (K). \tag{15.1.5}$$

证 若 K 是双旋的, 则存在 $h \in H_-$, $h(K) = K$. 由 (15,1,2), 有 $h' =$ref $\cdot h \in H_+$. 从而, $h'(k) = ref(K)$. 必要性得证.

反之, 由于 $h'(K) =$ref (K) 且 $h' \in H_+$, 依 (15,1,2) 有 ref $\cdot h' \in H_-$. 又, ref $\cdot h'(K) =$ref $\cdot$ ref $(K) = K$. 从而, K 是双旋的. 这就得到了充分性. ▯

由图 15.1.2 可以看出图 15.1.1(a) 中的八字结是双旋的.

利用 §15.3 中的进一步的结果, 我们将会看到上手结和它

的镜象，或者说*左手结*和*右手结*是等价的但属于不同的同痕类型.

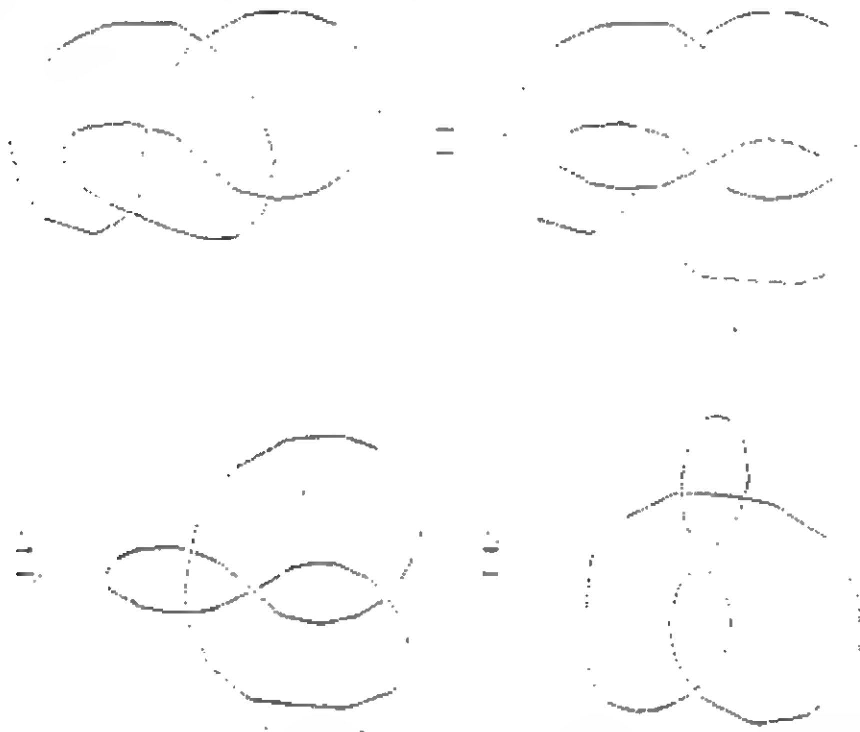


图 15.1.2

至此，人们会问是否每一个 $\mathcal{R}^3$ 到它自身的保定向同胚 h 均可由一个同痕形变实现，或者说，对于给定的 h, 是否存在 $h_t, 0 \leq t \leq 1$, 使得 $H(t,p) = h_t(p)$ 同时对 t 和 p 连续， $h_0(p) = p$ 和 $h_1(p) = h(p), p \in \mathcal{R}^3$? 若回答是否定的，那就必导致第三种类型纽结之出现. 事实上，回答是肯定的. 不管怎样，我们可以将引理 15.1.1 改进为如下的

定理 15.1.1 两个纽结 K_1 和 K_2 属于同一个同痕类型，当且仅当

$$\exists h \in H_+ : \quad h(K_1) = K_2. \tag{15.1.6}$$

证 必要性自然为引理 15.1.1 的一个直接结果. 而充分

性的证明则不容易，可在 [Fit1] 中查到.　♮

正如每一个 $\mathcal{R}^3$ 到它自身的同胚不是保定向必是逆定向的，每个 K 到它自身的同胚也是这样. 这就使我们可以定义一个纽结是 *可逆的*, 如果存在一个 $\mathcal{R}^3$ 到它自身的保定向同胚 h 使得限定在 K 上的同胚 $h|_K$ 为逆定向的. 可以证明，三叶结和四结均为可逆的. 当然，任何一个与它的镜象在同一同痕类型的纽结全是可逆的. 然而，仍有无限多个非可逆的纽结 [Tro1].

§15.2　图的模型

对于一个链 L, 处于 §15.1 中所说的正位，在由 (15.1.1) 所定义的平行投影 $proj_0$ 之下的象 $proj_0(L)$ 被称为 L 的 *全影*, 并用 U 表示. 如果将 U 上的每一个二重点均区别开上交叉与下交叉，则称之为 L 的 *形式*. 事实上，在图 15.1.1 中，(a) 表示三叶结的形式和 (b) 为四结的形式. 如果将 U 上所有的二重点视为节点，二重点之间的不与其它二重点为内点的线段为边则得一个图. 称之为 L 的 *基图*. 当然，无结圈，或者说平凡纽结，由于无二重点可以想像其基图为仅由一环组成的. 一个链 L, 如果它的基图全是连通的，则称它为 *准连通的*. 下面所说之链均指准连通的而不加说明. 如果一个链与两个链，它们存在无公共点的全影，之不交并等价，则称它是 *不连通的*. 当然，凡连通的链皆准连通的. 但，反之则一般不成立.

引理 15.2.1　一个图是一个链的基图，当且仅当它是 4- 正则的平面图. 仅有的例外是由一个环组成的图. 它不是 4- 正则的但是平凡链的基图.

证　由于在一个链的全影中每一个重点处的二重性决定其基图为 4- 正则的. 又，从基图之定义可知是平面的. 从而，

必要性显然.

反之，由 Euler 性，总可从一个节点和与它关联的一条边出发，只要到达一个节点就沿那条与进入之边对于此处之旋不相继的边离去直到得一个回. 若这个回是 Euler 的，则这个图是一个纽结的基图. 否则，从一节点有尚未走过的边与之关联，沿一条未走过的边在那个由所有未走过的边导出的子图上继行此法以求回. 直到所有边都走过为止. 从而，可知此图为一个链的基图. 充分性得证. ▯

因为在一个纽结的形式中，每一个二重点均有两种可能的状态如图 15.2.1 所示. 这就允许我们分配权 0 或 1 到每个节点上. 例如，在图 15.2.1 中， (a) 即沿着预先选定的链上各闭曲线的走向在二重点处通过上交叉时，下交叉是从左向右之走向赋权 0 和 (b) 即当通过上交叉时，下交叉为从右向左的走向赋权 1. 这样的在节点处有权 0 或 1 的基图被称为相应链的 带号图.

(a) (b)

图 15.2.1

在引理 15.2.1 的证明中，我们已经看到任何 4- 正则平面图均有一个 回的划分，即将边集划分为若干子集使得每个子集所导出的子图是一个回且在每个节点处此回上的相继边不是此节点处旋的相继边. 我们也称这样的回为 非继回. 这样的

回的划分也称为*非继的*. 若一个 4- 正则平面图, 在其上已给出了一个非继回的划分而且各节点带权 0 或 1, 则称之为一个 NoTPaPW4- 图 (或者说, *非继回划分带权 4- 正则平面图*).

引理 15.2.2 在 NoTPaPW4- 图和非平凡链之间存在一个 1-1 对应.

证 因为只要将 NoTPaPW4- 图中的每一个回选定一个方向, 根据节点处的权可以确定它作为二重点上交叉, 同样地, 下交叉, 这就得到了某链的一个形式. 由引理 15.2.1 即得引理. ▮

因为任何 4- 正则平面图的面集均可唯一地划分为两个子集使得在每个子集中任何二个面至多有一个节点在它们的边界上公共, 对每一个子集可以构造一个图 (当然, 平面的) 使得它的节点为这个子集中的面, 两个节点相邻当且仅当它们的相应面的边界有一个公共节点. 容易看出, 这两个图是互为平面对偶的. 如 §6.1 中所述, 它们的每一个均称为原 4- 正则平面图之*面图*. 一个链的带号图的面图, 若将它的边赋以这个带号图中相应节点的权, 则称之为这个链的一个*边带号面图*, 或简记为 *ESF*-图.

引理 15.2.3 一个带边权 0 或 1 的图是某个链 (或纽结) 的 EDF- 图, 当且仅当它是可平面的(或可平面的且没有双循环).

证 由 ESF- 图的定义, 对链的必要性显然. 对于纽结的必要性, 由引理 3.4.3 可得.

反之, 按照 §3.4 中的通穿规则在平面图上得到一个 (纽结) 或多个 (链) 闭曲线使得每一条边上恰有一个二重点. 然后, 用引理 15.2.2 的证明中的方法, 根据权确定在二重点处的上交

叉，同样地，下交叉. 由引理 3.4.4 即得充分性. ♮

一般地，对于平面图的互为对偶的一对，如果有双循环则至少有二个 4- 正则平面图均以这对平面图为面图. 这就是说，一个带权 0 和 1 的平面图的对偶对，可以与至少二个链的形式相对应.

引理 15.2.4 *在带二元权无双循环的平面图的对偶对和纽结的形式之间存在一个 1–1 对应.*

证 由于双循环，用 §3.4 中的通穿规则在此对中之一平面图上只可得一条闭曲线使每一边恰相应一个二重点. 用引理 15.2.2 的证明中的方法，根据边上的权确定相应二重点处之上交叉，同样地下交叉，即唯一地决定一个纽结的形式. 又，由平面对偶性，此对中的每一个图均相应这个形式. 从而，引理得证. ♮

根据第六章中所讨论的，我们也可以用一个序列表示一个链的形式. 设 ESF– 图上的边用字母标识使得不同的边所用的字母不同. 并且，每个字母均规定取值 0 或 1. 则，对于一个无双循环的平面图 G, 通过在 G 上利用 §3.4 中的通穿规则每穿过一边就记录代表这一边的字母使得每边恰穿过二次即可得一个字母的序列 $Seq(G)$. 若 G 是一个纽结的 ESF– 图，则 $Seq(G)$ 被称为*纽结序列*. 或者一般地，若 G 有双循环，*链序列*.

引理 15.2.5 *一个由二元值字母组成的序列是一个纽结序列，当且仅当它是交叉序列.*

证 引理 15.2.3 的一个直接结果. ♮

至此，我们已经看到带号图，ESF– 图和纽结 (或链) 序列都可应用于讨论纽结 (或链) 以代替形式. 这里，我们只限于讨

论 ESF- 图.

令 G 是一个平面图，在边上带二元权. 对于任何一个显节点 v, 令

$$\alpha_1(G;v) = G - v, \tag{15.2.1}$$

则称 α_1 和它的逆 α_1^{-1} 为 *第一初等运算*. 并统记为 π_1.

对于一个 2- 节点 v, 设 $e_1 = (w,v)$ 和 $e_2 = (u,v)$ 为与 v 关联的那二条边. 如果它们的权是不同的，则令

$$\alpha_2(G;E_v) = (G \cdot e_1) \cdot e_2 \tag{15.2.2}$$

为去掉这个 2- 节点 v, 然后将 u 和 w 合而为一所得之图. 当然，α_2 的逆 α_2^{-1} 就是在劈分一个节点为 u 和 w 后再加一个新节点 v 和它的二条关联边 (u,v) 和 (v,w) 使得带不同的权. 我们称 α_2 和 α_2^{-1} 为 *第二初等运算*, 并统记为 π_2.

设 $St(u;i,j,k) = (\{u,v_i,v_j,v_k\}, \{(u,v_t)|t = i,j,k\})$ 为图 G 中的一个 3- 星带权 $w(u,v_t)$ 在边 (u,v_t), $t = i,j,k$, 上. 如果将按 §3.4 中的通穿规则在 G 上得到的迁使得每边恰穿二次，用引理 15.2.2 证明中用的方法根据权决定每一个二重点处的上交叉，同样地下交叉并且与 (u,v_i) 和 (u,v_j) 相应的二重点为相继上交叉或相继下交叉，则令

$$\alpha_3(G;St) = (G - u) + \{(v_i,v_j),(v_j,v_k),(v_k,v_i)\}. \tag{15.2.3}$$

其中，$w(v_i,v_j) = w(u,v_k)$, $w(v_j,v_k) = w(u,v_i)$ 和 $w(v_k,v_i) = w(u,v_j)$. 这里，将 α_3 和它的逆 α_3^{-1} 称为 *第三初等运算*, 并统记为 π_3. 而且 π_1, π_2 和 π_3 均被称为 *初等运算*.

两个在边上带二元权的平面图 G_1 和 G_2, 若通过在 G_1 上作一系列的初等运算可得到 G_2, 则称 G_1 与 G_2 *初等等价*. 假若 G_1 和 G_2 在限制 π_2 和 π_3 之条件下初等等价，则称它们为 *正则等价*; 否则将一般的初等等价也称为 *旋转等价*.

问题 1 确定一个在边上带二分权的平面图的正则等价类与旋转等价类.

现在，我们回到拓扑学. 于 20 年代， Reidemeister 通过引进三种运算，分别用 $\gamma_1 = R_1$. $\gamma_2 = R_2$ 和 $\gamma_3 = R_3$ 表示，简化了对于纽结的研究. 他证明了这三种运算之下不会改变纽结的类型. 而且，同一个纽结的二个形式总可以通过这三种运算从一个变换到另一个. 我们称这三种运算 γ_1, γ_2 和 γ_3 为 *Reidemeister运算*.

在图 15.2.2 中，解释了这三种运算.

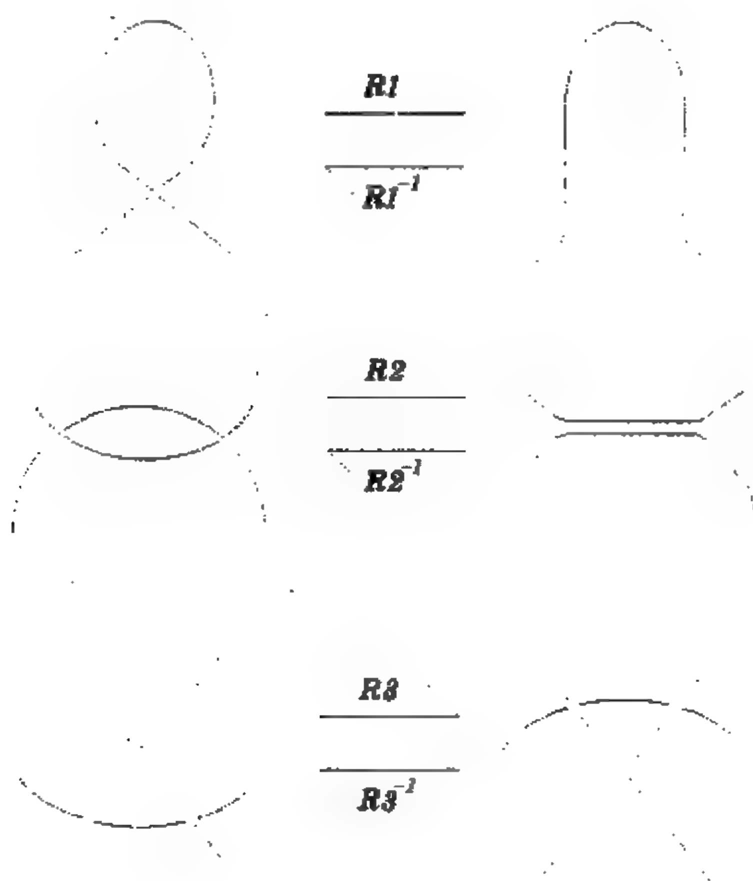


图 15.2.2

二个纽结形式，或者一般地二个链形式被称为属于同一类

转同痕类是指它们之一个可以通过一系列的 γ_1, γ_2 和 γ_3 变为另一个. 如果其中只用 γ_2 和 γ_3, 则称它们在同一个正则同痕类.

问题 2 确定纽结, 或一般地链的正则同痕类与旋转同痕类. ♮

为了揭示上面之问题 1 与问题 2 之关系, 我们必需看一看对于图的初等运算与对于纽结形式的 Reidemeister 运算之间的关系.

引理 15.2.6 在链形式上的运算 γ_i 与在边带二元权的平面图上的初等运算 π_i 相应, $i = 1, 2, 3$.

证 由引理 15.2.4 中所提供的边带二元权的平面图与链形式之间的对应. 容易验证, π_i 与 $\gamma_i, i = 1, 2$, 的对应关系. 对于 $i = 3$ 的情形, 考虑到 π_3 可以作用到图上之条件恰与在链形式上 γ_3 所需要之条件相应. 而且, 经 π_3 作用后的图上新边上权恰反映了经 γ_3 之后在链形式上的变化. 从而, π_3 与 γ_3 也是相应的. ♮

这个引理使我们不必区别上面的问题 1 与问题 2.

定理 15.2.1 两个链形式属于同一个旋转同痕类 (或正则同痕类), 当且仅当它们相应的 ESF- 图属于同一个旋转等价类 (或正则等价类).

证 引理 15.2.4 和引理 15.2.6 的直接结果. ♮

当然, 根据引理 15.2.5, 我们也可以用序列之形式描述上面的等价问题而不会遇到什么困难. 关键的一步就是找到在序列上的相应的运算. 这一任务留给感兴趣的读者去完成.

§15.3 纽结多项式

所谓纽结(或链)不变量,是指这样的一个由纽结(或链)所决定的函数 f 使得同一类型的纽结(或链)具有相同的 f. 本节之目的在于求形如多项式的不变量. 由 §15.2 中所讨论的, 我们可以只限于图(当然, 平面的而且边上有二元权)而不直接考察纽结(或链).

令 G 是一个边带二元权的平面图. 对于一条边 e, 其权 $w(e)=0$, 或 1. 在这里, e 允许是环或割边. 记 $k_i=k_i(G)$ 为权是 $i=0,1$ 的割边的数目, 和 $l_i=l_i(G)$ 为权是 $i=0$, 上的环的数目.

现在, 我们定义一个函数 $\Phi(G)$, $G=(V,E)$ 为边带二元权的平面图使得满足如下的递推关系:

$$\Phi(G)=\begin{cases} A(e)\Phi(G-e)+B(e)\Phi(G\cdot e), \\ \qquad\qquad \text{若 } e\in E \text{ 既非割边也非环;} \\ (X+Yz)^{\bar{w}(e)}(Xz+Y)^{w(e)}\Phi(G-e), \\ \qquad\qquad \text{若 } e \text{ 是一个环;} \\ (X+Yz)^{w(e)}(Xz+Y)^{\bar{w}(e)}\Phi(G\cdot e), \\ \qquad\qquad \text{若 } e \text{ 是一条割边.} \end{cases} \tag{15.3.1}$$

其中,

$$\begin{cases} A(e)=\bar{w}(e)X+w(e)Y; \\ B(e)=w(e)X+\bar{w}(e)Y \end{cases}$$

和 $G-e$, $G\cdot e$ 分别为在 G 上去掉, 收缩 e 为一个节点所得之图. 并且, 满足如下的始条件:

Cond. 1　若 G 是平凡图，即只有一个节点而无边，则

$$\Phi(G) = 1; \tag{15.3.2}$$

Cond. 2　若 G 是不连通的，即 $G = G_1 + G_2$，则

$$\Phi(G) = z\Phi(G_1)\Phi(G_2). \tag{15.3.3}$$

由这个递推关系，容易验证，若 G 是连通的而且每条边非环即割边，则有

$$\Phi(G) = (X + Yz)^{k_1+l_0}(Xz + Y)^{k_0+l_1}.$$

进而，我们还可以看出，如果 G^* 是 G 的平面对偶，则 $\Phi(G^*)$ 与 $\Phi(G)$ 具有相同的形式但只是 X 和 Y 的位置交换.

引理 15.3.1　对任何所考虑的图 G, $\Phi(G)$ 是 X,Y 和 z 的多项式.

证　用归纳法. 由条件 (15.3.2), 可以验证度小于 G 的图满足引理，即 Φ 是 X,Y 和 z 的多项式. 若 G 不连通，条件 (15.3.3) 使我们可以由归纳假设知，对其所有连通片 Φ 为多项式. 由条件 (15.3.3) 可知 $\Phi(G)$ 亦为 X,Y 和 z 的多项式. 否则，即 G 是连通的. 这时，由归纳假设知 $\Phi(G-e)$ 和 $\Phi(G\cdot e)$ 均为 X,Y 和 z 的多项式. 从而，根据 (15.3.1) 可得 $\Phi(G)$ 为 X,Y 和 z 的多项式. ∎

下面，我们看一看 Φ 对于图在初等运算之下将如何变化.

令 v 为所考虑之图 $G=(V,E)$ 的一个显节点. 记 $e=(u,v)$ 带权 1 为与 v 关联的那一条边. 由 (15.3.1), 有

$$\Phi(G) = (A(e)z + B(e))\Phi(\pi_1 G). \tag{15.3.4}$$

在上式中，对于 G 中去掉 e 后所得之图，用到了 (15.3.3) 和 (15.3.2).

引理 15.3.2 对于 π_1, Φ 是不变的，当且仅当 $Xz+Y=X+zY=1$.

证 由 (15.3.4). 对于 π_1, Φ 是不变的，当且仅当

$$A(e)z+B(e)=\bar{w}(e)(Xz+Y)+w(e)(X+Yz)=1.$$

由 $w(e)$ 和 $\bar{w}(e)$ 之对称性，即得引理. ▯

对于 π_2，令 v 为一个 2- 节点，其关联边为 $e_1=(u,v)$, $e_2=(v,w)$ 满足条件 $w(e_1)\neq w(e_2)$. 根据 (15.3.1), 有

$$\begin{aligned}\Phi(G)=\big(&zA(e_1)A(e_2)+A(e_1)B(e_2)\\&+A(e_2)B(e_1)\big)\Phi(G-v)\\&+B(e_1)B(e_2)\Phi(\pi_2G).\end{aligned}\tag{15.3.5}$$

引理 15.3.3 对于 π_2, Φ 是不变的，当且仅当

$$XY=1;\qquad XYz+X^2+Y^2=0.\tag{15.3.6}$$

证 由 e_1 和 e_2 之间对称性, 可以假设 $w(e_1)=1$ 和 $w(e_2)=0$. 由 (15.3.5), Φ 是不变的，当且仅当 $\Phi(G-v)$ 的系数为 0 和 $\Phi(\pi_2G)$ 的系数为 1. 因为

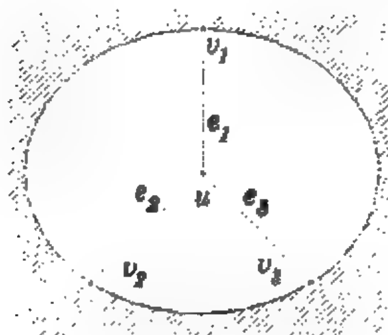
$$\begin{cases}A(e_1)=Y, & A(e_2)=X,\\ B(e_1)=X, & B(e_2)=Y,\end{cases}$$

即得引理. ▯

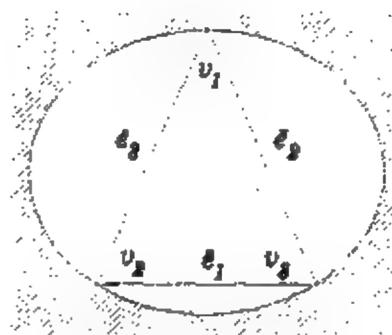
对于 π_3, 令 St 为以 u 为中心的星和 $v_i, i=1,2,3$, 为它的显节点且满足所需要之条件. 则, $\pi_3 G$ 有三角形 $Tr=(v_1,v_2,v_3)$ 与之相应. 如果 $e_i=(u,v_i), i=1,2,3$, 为 G 中 St 上之边, 则有

$$w(v_1,v_2)=w(e_3),\ w(v_2,v_3)=w(e_1),\ w(v_1,v_3)=w(e_2).$$

这里, 我们可以记 $\bar{e}_1=(v_2,v_3)$, $\bar{e}_2=(v_1,v_3)$ 和 $\bar{e}_3=(v_1,v_2)$ 分别为 $\pi_3 G$ 中 Tr 上的边, 如图 15.3.1 所示.



(a) St 在 G 中



(b) Tr 在 $\pi_3 G$ 中

图 15.3.1

为简便, 令

$$\begin{cases} G_0=G-u; \\ G_1=((G-e_1)\cdot e_2)-e_3; \\ G_2=((G\cdot e_1)-e_2)\cdot e_3; \\ G_3=((G\cdot e_1)\cdot e_2)-e_3; \\ G_4=((G\cdot e_1)\cdot e_2)\cdot e_3. \end{cases} \tag{15.3.7}$$

则, 容易验证, 有

$$\begin{cases} \big((G-e_1)e_2\big)-e_3=\emptyset_1+G_0; \\ \big((G-e_1)-e_2\big)\cdot e_3=\big((G-e_1)\cdot e_2\big)-e_3 \\ \qquad =\big((G\cdot e_1)-e_2\big)-e_3=G_0. \end{cases} \tag{15.3.8}$$

其中，$\emptyset_1$ 为这个平凡图.

由 (15.3.1) 和 (15.3.7-8), 用常规的计算即可得

$$\begin{aligned}\Phi(G)=\Big(z\prod_{i=1}^{3}A(e_i)&+A(e_1)A(e_2)B(e_3)\\ &+A(e_1)B(e_2)A(e_3)\\ &+B(e_1)A(e_2)A(e_3)\Big)\Phi(G_0)\\ &+A(e_2)B(e_2)B(e_3)\Phi(G_1)\\ &+B(e_1)A(e_2)B(e_3)\Phi(G_2)\\ &+B(e_1)B(e_2)A(e_3)\Phi(G_3)\\ &+\prod_{i=1}^{3}B(e_i)\Phi(G_4).\end{aligned} \tag{15.3.9}$$

相仿地，由于 $\bar{e}_i$ 为在 π_3G 的三角形 Tr 中与 G 中 St 的边 e_i 相应，$i=1,2,3$, 考虑到关系

$$\left.\begin{aligned} &\big((\pi_3G-\bar{e}_1)-\bar{e}_2\big)-\bar{e}_3=G_0;\\ &\big((\pi_3G-\bar{e}_1)\cdot\bar{e}_2\big)-\bar{e}_3=G_2;\\ &\big((\pi_3G-\bar{e}_1)-\bar{e}_2\big)-\bar{e}_3=G_1;\end{aligned}\right\} \tag{15.3.10a}$$

$$\big((\pi_3 G - \bar{e}_1)\cdot \bar{e}_2\big)\cdot \bar{e}_3 = G_3 \tag{15.3.10b}$$

和关系

$$\begin{aligned}\big((\pi_3 - \bar{e}_1)\cdot \bar{e}_2\big)\cdot \bar{e}_3 &= \big((\pi_3 G\cdot \bar{e}_1) - \bar{e}_2\big)\cdot \bar{e}_3\\ &= \big((\pi_3 G\cdot \bar{e}_1)\cdot \bar{e}_2\big) - \bar{e}_3\\ &= \big((\pi_3 G - \bar{e}_1)\cdot \bar{e}_2\big)\cdot \bar{e}_3\\ &= G_4,\end{aligned} \tag{15.3.11}$$

我们可以得到

$$\begin{aligned}\Phi(\pi_3 G) = \prod_{i=1}^{3} & B(\bar{e}_i)\Phi(G_0)\\ &+A(\bar{e}_1)B(\bar{e}_2)B(\bar{e}_3)\Phi(G_1)\\ &+B(\bar{e}_1)A(\bar{e}_2)B(\bar{e}_3)\Phi(G_2)\\ &+B(\bar{e}_1)B(\bar{e}_2)A(\bar{e}_3)\Phi(G_3)\\ &+B\big(\bar{e}_1)A(\bar{e}_2)A(\bar{e}_3)\\ &+A(\bar{e}_1)B(\bar{e}_2)A(\bar{e}_3)\\ &+A(\bar{e}_1)A(\bar{e}_2)(X+Yz)^{w\bar{e}_3)}\\ &\times(Xz+Y)^{\bar{w}(\bar{e}_3)}\big)\Phi(G_4).\end{aligned} \tag{15.3.12}$$

引理 15.3.4 对 π_3, Φ 是不变的当且仅当

$$X^2 + Y^2 + XYz = 0. \tag{15.3.13}$$

证 由 (15.3.9) 和 (15.3.12) 和由对偶性所确定的关系

$$A(\bar{e}_i) = B(e_i),\ B(\bar{e}_i) = A(e_i),$$

$i = 1, 2, 3$, 我们有

$$\begin{aligned}
\Phi(G) - \Phi(\pi_3 G) = \Big(& z \prod_{i=1}^{3} A(e_i) - \prod_{i=1}^{3} B(e_i) \\
& + A(e_1)A(e_2)B(e_3) \\
& + A(e_1)B(e_2)A(e_2) \\
& + B(e_1)A(e_2)A(e_3)\Big)\Phi(G_0) \\
& + \big(A(e_1)B(e_2)B(e_3) \\
& - A(e_1)B(e_2)B(e_3)\big)\Phi(G_1) \\
& + \big(B(e_1)A(e_2)B(e_3) \\
& - B(e_1)A(e_2)B(e_3)\big)\Phi(G_2) \\
& + \big(B(e_1)B(e_2)A(e_3) \\
& - B(e_1)B(e_2)A(e_3)\big)\Phi(G_3) \\
& + \big(B(e_1)B(e_2)B(e_3) \\
& - B(e_1)A(e_2)A(e_3) \\
& - A(e_1)B(e_2)A(e_3) \\
& - A(e_1)A(e_2)(X + Yz)^{w(e_3)} \\
& \times (Xz + Y)^{\bar{w}(e_3)}\big)\Phi(G_4)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(z\prod_{i=1}^{3}(A(e_i) - B(e_i)) \\
&\quad + A(e_1)A(e_2)B(e_3) \\
&\quad + A(e_1)B(e_2)A(e_3) \\
&\quad + B(e_1)A(e_0)A(e_3)\Big)\Phi(G_0) \\
&\quad - \big(B(e_1)A(e_2)A(e_3) \\
&\quad + A(e_1)B(e_2)A(e_3) \\
&\quad - \prod_{i=1}^{3} B(e_i) + A(e_1) \\
&\quad \times A(e_2)(X + yz)^{w(e_3)} \\
&\quad \times (Xz + Y)^{\bar{w}(e_3)}\big)\Phi(G_4). \qquad (15.3.14)
\end{aligned}
$$

由 π_3 的定义和对称性，只要考察如下二种情形即足.

情形 1 $w(e_1) = 0$, $w(e_2) = 1$ 和 $w(e_3) = 0$. 由关系

$$
\begin{cases}
A(e_1) = X,\ A(e_2) = Y,\ A(e_3) = X; \\
B(e_1) = Y,\ B(e_2) = X,\ B(e_3) = Y,
\end{cases}
$$

我们有 (15.3.14) 变为

$$
\begin{aligned}
\Phi(G) - \Phi(\pi_3 G) = (&X^2Yz - XY^2 + XY^2 \\
&+ X^3 + XY^2)\Phi(G_0) \\
&- \big(XY^2 + X^3 - XY^2
\end{aligned}
$$

$$+XY(Xz+Y)\big)\Phi(G_4)$$

$$=(X^2Yz+XY^2+X^3)$$

$$\times\big(\Phi(G_0)-\Phi(G_4)\big).$$

情形 2 $w(e_1)=0,\ w(e_2)=0,\ w(e_3)=1$. 由关系

$$\begin{cases} A(e_1)=X,\ A(e_2)=Y,\ A(e_3)=Y; \\ B(e_1)=Y,\ B(e_2)=X,\ B(e_3)=X, \end{cases}$$

可得 (15.3.14) 变为

$$\begin{aligned}\Phi(G)-\Phi(\pi_3G)=&(XY^2z-X^2Y+X^2Y\\&+X^2Y+Y^3)\Phi(G_0)\\&-\big(Y^3+X^2Y-X^2Y\\&+XY(X+Yz)\big)\Phi(G_1)\\=&(XY^2z+X^2Y+Y^3)\\&\times\big(\Phi(G_0)-\Phi(G_4)\big).\end{aligned}$$

综合上述二种情形，即得

$$\Phi(G)-\Phi(\pi_3G)=\delta(X,Y)(XYz+X^2+Y^2)$$
$$\times\big(\Phi(G_0)-\Phi(G_4)\big). \qquad (15.3.15)$$

其中,

$$\delta(X,Y)=\begin{cases}X, & \text{当在情形 1 时;}\\ Y, & \text{当在情形 2 时.}\end{cases}$$

从而，引理得证. ▮

对于边上带二元权的平面图 G, 令

$$\Phi(x;G)=\Phi(G)\big|_{X=x,Y=\frac{1}{x},z=-(x^2+\frac{1}{x^2})}. \tag{15.3.16}$$

则由引理 15.3.1, $\Phi(x;G)$ 是一个单变元 x 的多项式.

定理 15.3.1 对于边带二元权的平面图 G, 多项式 $\Phi(x;G)$ 是正则等价类的一个不变量.

证 引理 15.3.3-4 的直接结果. ▮

根据引理 15.2.3, 只要注意到如图 15.3.2 所示的在一个链的全影上二重点处的运算 $sp1$, $sp2$ 和它们的逆对应在 ESF– 图上的去边和收缩边于一点和它们的逆. 以及，在一个链形式中的每个交叉点处均有两个状态, 如图 15.3.3 所示, 我们即可从 §15.2 中所描述的对于图的初等运算与对于链形式的 Reidemeister 运算之间的联系发现对于链 L 的一个 X, Y 和 z 的多项式 $\Phi(L)$ 与 $\Phi(G)$ 相对应.



图 15.3.2

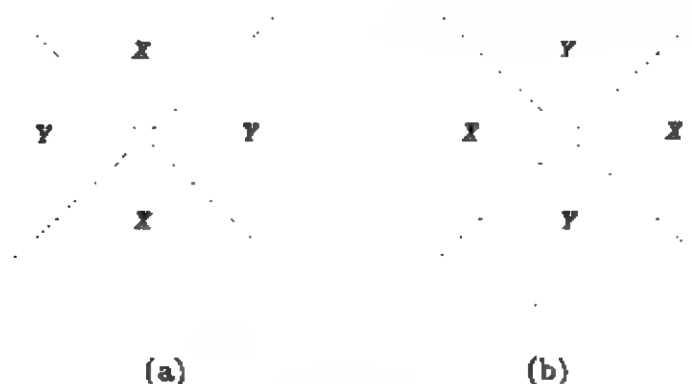
相仿地，令

$$\Phi(x;L)=\Phi(L)\Big|_{X=x,Y=\frac{1}{x},z=-(x^2+\frac{1}{x^2})},\tag{15.3.17}$$

则有

推论 15.3.1 多项式 $\Phi(x;K)$ 是纽结 K 的一个正则同痕型的不变量. ♮

由引理 15.3.2, $\Phi(x;G)$ 显然并不是带二元权的平面图的旋转等价类的一个不变量.



(a) (b)

图 15.3.3

然而，我们可以引进

$$\Psi(G)=(-Y)^{c_0-2c_1}(-X)^{c_1-2c_0}\Phi(G).\tag{15.3.18}$$

其中， c_0 和 c_1 分别为带权 0 和 1 的边数. 则， Ψ 将会变为旋转等价类的一个不变量.

引理 15.3.5 多项式 $\Psi(G)$ 在关系 (15.3.6) 之下对于 π_1 是不变的.

证 只讨论在 π_1 作用下的边 e 之权为 1 的情形. 当然，

权为 0 的情形可以相仿地得到. 由于 e 的权为 1, 有

$$c_0(\pi_1 G) = c_0(G), \qquad c_1(\pi_1 G) = c_1(G) - 1.$$

由 (15.3.4), 可以看出

$$\begin{aligned}\Psi(G) &= (-Y)^{c_0(G)-2c_1(G)}(-X)^{c_1(G)-2c_0(G)} \\ &\quad \times (X+Yz)\Phi(\pi_1 G) \\ &= (-Y)^{c_0(\pi_1 G)-2c_1(\pi_1 G)-2} \\ &\quad \times (-X)^{c_1(\pi_1 G)+1-2c_0(\pi_1 G)} \\ &\quad \times (X+Yz)\Phi(\pi_1 G).\end{aligned}$$

从 (15.3.6) 中之条件, 有

$$X + Yz = -Y^2 X^{-1}.$$

从而,

$$\begin{aligned}\Psi(G) &= (-Y)^{c_0(\pi_1 G)-2c_1(\pi_1 G)}(-X)^{c_1(\pi_1 G)-2c_0(\pi_1 G)} \\ &\quad \times \Phi(\pi_1 G) = \Psi(\pi_1 G).\end{aligned}$$

∎

引理 15.3.6 多项式 $\Psi(G)$ 在 (15.3.6) 中的关系下对于 π_2 是不变的.

证 因为 G 总有一边权为 0 和一边权为 1, 在 $\pi_2 G$ 中的

权为 0 和 1 的边数比 G 中的均多 1. 由引理 15.3.3, 有

$$\Psi(G) = (-Y)^{c_0(G)-2c_1(G)}(-X)^{c_1(G)-2c_0(G)}\Psi(G)$$

$$= (-Y)^{+1-2}(-X)^{+1-2}\Psi(\pi_2 G).$$

由 (15.3.6) 中的第一个关系,

$$= \Psi(\pi_2 G).$$

♮

引理 15.3.7 多项式 $\Psi(G)$ 在 (15.3.6) 中之关系下对 π_3 是不变的.

证 因为在 π_3 之下, 不改变图中权为 0 或权为 1 的边数, 由引理 15.3.4, 即得引理. ♮

对于边上带二元权的平面图 G, 令

$$\Psi(x; G) = \Psi(G)\Big|_{X=x, Y=1/x, z=-(x^2+1/x^2)}. \tag{15.3.19}$$

定理 15.3.2 多项式 $\Psi(x; G)$ 是边带二元权平面图的旋转等价类的一个不变量.

证 引理 15.3.5-7 的直接结果. ♮

与 (15.3.17) 相仿地, 令

$$\Psi(x; L) = \Psi(L)\Big|_{X=x, Y=1/x, z=-(x^2+1/x^2)}, \tag{15.3.20}$$

则可得

推论 15.3.2 多项式 $\Psi(x; K)$ 对于纽结 K 是一个旋转同痕型的不变量. ♮

§15.4 注记

15.4.1 由 (15.3.17) 所定义的多项式 $\Phi(x;K)$ 实际上就是由 Kauffman 引进的括弧多项式 [Kaa1]. 由推论 15.3.1 又得到了括弧多项式对于纽结是一个正则同痕型的不变量.

15.4.2 由 (15.3.20) 所定义的多项式 $\Psi(x;K)$ 就是 Jones 多项式 $V_K(t)$, 其中 $t=Y^2X^2$. 这样，推论 15.3.2 又一次显示了 Jones 多项式对于纽结是一个旋转同痕型的不变量.

15.4.3 首先注意到于 50 年代 Tutte 所发现的，在图论中被人们称之为 Tutte 多项式与于 80 年代 Jones 发现的拓扑学中的对于纽结的多项式，被人们称为 Jones 多项式之关系的应归功于 Thistethwaite[Te1]. 事实上，不管是 Jones 多项式还是括弧多项式如 §15.3 中所述均满足与 Tutte 多项式具有相仿类型的递推关系式. 进而，它们也同 Tutte 多项式一样有相应的按支撑树的展开式. 这种展开式也是 Tutte 于 50 年代发现的 [Tat13]. 通过纽结形式研究纽结的基本理论是于 30 年代由 Reidemeister 建立的并引进三种运算 [Re1]. 这就使得我们能够将这个拓扑学中的问题转化为图论中的问题.

15.4.4 在纽结的研究中，绕过纽结形式和 Reidemeister 运算而使用拓扑变换的方法，是最古老的和也许是更为成功的. 这种方法是基于纽结在 3- 维空间中的补. 自然要问是否纽结可以由它的补所确定. 人们猜想是肯定的. 然而，直到 1989 年这个猜想才被证实 [GL1]. 关于对纽结群的讨论可参考这方面的入门教科书 [CroF1].

15.4.5 关于纽结理论在统计力学和量子场论中之应用可参见 [Bax1, Wnt1].

15.4.6 纽结之分类仍是当今公开的问题. 虽然 Jones 多项式和括弧多项式被视为纽结理论中现今颇为重要的进展. 它们均非完全不变量, 也就是不能用它们区别不同的旋转同痕和正则同痕型. 与此相应的也有平面图中之分类问题.

参考文献

Abel, L. C.

[Ab1] On the automated layout of multi-layer planar wiring and a related graph coloring problem, Ph.D. Dissertation, Univ. Illinois, Dept. Comput. Sci., Rep. R–546, 1972.

Aho, A. V., Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D.

[AHU1] The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley, 1974.

Akers, S. B. and F. O. Hadlook

[AkH1] Graph theory models of electrical networks and their minimum cross-over layouts, presented at the Conf. Graph Theory Comput., Kingston, Jamaica, 1969.

Aksionov, V. A. and L. S. Melnikov

[AM1] Some counterexamples associated with the three color problem, *J. Comb. Theory* **B28** (1980), 1–9.

Albertson, M. O.

[Al1] A lower bound for the independence number of a planar graph, *J. Comb. Theory* **B20** (1976), 84–93.

Alekseev, V. B. and V. S. Gonchakov

[AlG1] Thickness of arbitary complete graphs, *Mat. Sbornik* **101** (1976), 212–230.

Allaire F. and E. R. Swart

[AS1] A systematic approach to the determination of reducible configurations in the four color conjecture, *J. Comb. Theory* **B25** (1978), 339–362.

Appel, K. and W. Haken

[AH1] The existence of unavoidable sets of geographically good configurations, *Illinois J. Math.* **20** (1976), 218–297.

[AH2] Every planar map is four colorable I: discharging, *Illinois J. Math.* **21** (1977), 429–490.

[AH3] An unavoidable set of configurations in planar triangulations, *J. Comb. Theory* **B26** (1979), 1–21.

Appel, K., W. Haken and J. Kock

[AHK1] Every planar map is four colorable II: reducibility, *Illinois J. Math.* **21** (1977), 491–567.

Appel, K. W. Haken and J. Mayer

[AHM1] Triangulations a v_5 separes dans le probleme des quatre couleurs, *J. Comb. Theory* **B27** (1979), 135-150.

Archdeacon, D.

[Arch1] A Kuratowski theorem for the projective plane,*J. Comb. Theory* **5** (1981),243–246.

Archdeacon,D. and P. Huneke

[ArH1] A Kuratowski theorem for non-orientable surfaces,*J.Comb. Theory* **B46** (1989),173–231.

[ArH2] On cubic graphs which are irreducible for non-orientable sur-

faces, *J.Comb. Theory* **B39**(1985),233–264.

Auslander,L., T.Brown,and J.W.T.Youngs

[ABY1] The imbedding of graphs in manifolds, *J. Math. Mech.* **12**:4 (1963), 229–234.

Auslander, L. and S. V. Parter

[AP1] On imbedding graphs in sphere, *J. Math. Mech.* **10** (1961), 517–523.

Ball, W. W. R.

[Ball] Mathematical Recreations and Essays, Macmillan, 1956.

Bari, B. R.

[Bar1] Absolute reducibility of maps at most 19 regions, Thesis, John Hopkins, 1966.

Basden, A. and K. G. Nichols

[BN1] New topological method for layout printed circuits, *Proc. IEEE* **120** :3 (1973), 325–328.

Batini, C., M. Talamo and R. Tamassia

[BTT1] Computer aided layout of entity-relationship diagrams, *IEEE J. Syst. Software* **4** (1984). 163–173

Battle,J.,F.Harary and Y.Kodama

[BHY1] Every planar graph with nine points has a non-planar complement, *Bull. Amer. Math. Soc.*68(1962),569–571.

Battle,J.,F.Harary, Y.Kodama and J. W. T. Youngs

[BHKY1] Additivity of the genus of a graph ,*Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.)**68**(1962),565–568.

Baubock, E.

[Ba1] Ein Verfahren zur Abbildung eines planaren Graphen mit zyklisch geordneter Nachbarschaften in der Ebene, *Angew. Inform.* **1** (1978), 9–14.

Baxter, R. J.

[Bax1] Exactly Solved Models in Statistical Mechanics, Acad. Press, 1982.

Becker, B.

[Be1] Uber die kreuzungsfreie, rechtwinklige Einbettung von gewichteten Graphen in die Ebene, Ph.D. Dissertation, Uni. Saarlardes, 1982

Becker, B. and G. Hotz

[BeH1] On the optimal layout of planar graphs with fixed boundary, *SIAM J. Comput.* **16** (1987), 946–972.

Behzao, M.

[Beh1] A criterion for the planarity of the total graph of a graph, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **63** (1967), 679–681.

Beineke, L.and F. Harary

[BeiH1] On the thickness of the complete graph,*Bull. Amer. Math. Soc.* **70** (1964),618–620.

[BeiH2] Inequalities involving the genus of a graph and its thickness, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*$\mathbf{7}$(1965),19–21.

[BeiH3] The thickness of the complete graph, *Canad. J. Math.* **17** (1965), 850–859.

Beineke, L., F. Harary and J. W. Moon

[BHM1] On the thickness of the complete bibartite graph,*Proc. Camb. Phil. Soc.*$\mathbf{60}$(1964),1–5.

Belaga, E. G.

[Bel1] On coloring the graph of a triangulation of the n-sphere, *Uspehi Mat. Nauk* **28**:6 (1973), 191–192.

Bellman, R., K. L. Cook and J. A. Lockett

[BCL1] Algorithms, Graphs, and Computers, Acad. Press, 1970.

Beraha, S. and J. Kahane

[BeK1] Is the four color conjecture almost false? , *J. Comb. Theory* **B27** (1979), 1–12.

Beraha, s., J. Kahane and N. J. Weiss

[BeKW1] Limits of zeroes of recursively defined families of polynomials, in Studies in Foundations and Combinatorics, Advances in Mathematics Supplementary Studies, Vol.**1** (ed. by G. C. Rota), 213–232, Acad. Press, 1978.

[BeKW2] Limits of zeroes of recursively defined polynomials, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **72** (1975), 4209.

Berge, C.

[Berg1] Graphs and Hypergraphs, North - Holland, 1973.

Berman, G. and W. T. Tutte

[BerT1] The golden root of a chromatic polynomial, *J. Comb. Theory* **6** (1969), 301–302.

Berman, K.

[Berk1] Three-coloring of planar 4-valent maps, *J. Comb. Theory* **B30** (1981), 82–88.

[Berk2] Bicycles and spanning trees, *SIAM J. Algeb. Disc. Meth.* **7** (1987), 1 – 12.

Bernhart, F. R.

[Bern1] The four-color theorem proved by multi-linear algebra???, Proc. Conf. Algeb. Aspects Comb., Util. Math. Pub., 1975, 219–226.

[Bern2] Six rings in minimal five color maps, *Amer. J. Math.* **69** (1947), 391–412.

[Bern3] Another reducible edge configuration, *Amer. J. Math.* **70** (1948), 144–146.

Bhatt, S.N. and F. T. Leighton

[BL1] A framework for solving VLSI graph layout problems, *J. Comput. Syst. Scien.*, **28** (1984), 300 – 343.

Biggs, N.

[Bg1] Algebraic Graph theory, Cambridge Uni. Press, 1974.

Biggs, N. L. and G. H. J. Meredith

[BM1] A theorem on planar partitions, Proc. 5-th British Comb. Conf., Aberdeen, 1975, 73–78.

Birkhoff, G. D.

[Bi1] The reducibility of maps, *Amer, J. Math.* **35** (1913), 115–128.

Birkhoff, G. D. and D. C. Lewis

[BiL1] Chromatic polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.* **60** (1946), 355–455.

Bixby, R. E.

[Bix1] Kuratowski's and Wagner's theorem for matroids, *J. Comb. Theory* **B22** (1977), 31 – 53.

Blazek,J.and M. Koman

[BK1] A minimal problem concerning complete plane graphs, Proc. Symp. Simolenice, 1963,

113–117.

Bondy, J. A. and U. S. R. Murty

[BoM1] Graph Theory with Applications, Macmillan, 1976.

Bose, N. K. and K. A. Prabhu

[BP1] Thickness of graphs with degree constrained vertices, *IEEE Trans. Cir. Syst.* Case- **24**:4(1977), 184–190.

Bouchet, A.

[Bou1] Caracterisation des symboles croises de genre nul., *C.R. Acad. Sci. Paris* t.**274** (1972), 724–727.

Braun, D. *et al*

[BrM1] Techniques for multilayer channal routing, *IEEE Trans. CAD* **7** (1988) 698–712.

Brehaut, W. M.

[Bre1] On planar graphs and the plainer non-planar graphs, Doct. Dissertation, Uni. Waterloo, 1974.

[Bre2] Finding a mesh of a planar graph, Conf. Comput. Algeb. Number Theory, Uni. New Brunswick, Fredericton, 1975, 25–28.

[Bre3] Efficient planar embedding, Proc. 7-th S-E Conf. Comb. Graph Theory Comput., 1976, 177 – 190.

Brooks, R. L., C. A. B. Smith, A. H. Stone and W. T. Tutte

[BSST1] The dissection of rectangles into squares, *Duke Math. J.* **7** (1940), 312–340.

Bruno, J.,K. Steiglitz and L. Weinberg

[BuSW1] A new planarity test based on 3–connectivity, *IEEE Tans. Cir. Theory* CT-**17**:2 (1970), 197.

Capobianco, M. and J. C. Molluzzo

[CM1] Examples and Counterexamples, North - Holland, 1978.

Catlin, P. A.

[Ca1] Hajos graph-coloring conjecture: variation and counterexamples, *J. Comb. Theory* **B26** (1979), 268–274.

Cayley, A.

[Cay1] A theorem on trees, *Quart. J. Math.* **23** (1889), 376–378.

Chan, S. P.

[Ch1] Introductory Topological Analysis of Electrical Networks, Holt, 1969.

Chen, W. K.

[Che1] Applied Graph Theory, North - Holland, 1971.

[Che2] On vector spaces associated with a graph, *SIAM J. Appl. Math.* **20** (1971), 526–529.

Chen, R. W., Y. Kajitani and S. P. Chan

[CKC1] A graph - theoretic via minimization algorithm for two - layer printed circuit boards, *IEEE Trans. Cir. Syst.* Case-**30** (1983), 284 – 299.

Chew, L. P.

[Chew1] There are planar graphs almost as good as the complete graph, *J. Comput. Syst. Sci.* **39** (1989), 205–219.

Chojnacki, H.

[Cho1] A contribution to the four color problem, *Amer. J. Math.* **64** (1942),36–54.

Chua, L. O. and L. K. Chen

[CC1] On optimally sparse cycle and coboundary basis for a linear graph, *IEEE Trans. Cir. Theory* CT-**20** (1973), 495-503.

Chung, F. R. K.(金芳蓉),F. T. Leighton and A L. Rosenberg

[CLR1] Embedding graphs in books: a graph layout problem with applications to VLSI design, *SIAM J. Algeb. Discrete Methods* **8** (1987), 33 – 58.

Clarke, E.M. Jr. and Y. Feng

[ClF1] Escher-a geometrical layout system for recursively defined circuits, *IEEE Trans. CAD* **7** (1988), 908–918.

van Cleemput, W. M.

[Cle1] Mathematical models for the circuit layout problem, *IEEE Trans. Cir. Syst.* Case-**23**: 12 (1976), 759–767.

van Cleemput, W. M. and J. G. Linders

[CleL1] An improved graph theoretical model for the circuit layout problem, Proc. 11–th Design Automation Workshop, Denver, 1974.

Cohoon, J. P. and P. L. Heck

[CoH1] BEAVER: a computational geometry based tool for switchbox routing, *IEEE Tans. CAD* **7** (1988), 684–697.

Cong, J., D. F. Wong and C. L. Liu

[CWL1] A new approach to three or four layer channal routing, *IEEE Trans. CAD* **7** (1988), 1094–1104.

Cook, S. A.

[Co1] The complexity of theorem proving procedures, Proc. 3–rd ACM Symp. Comput., 1971, 151 – 158.

Cori, R.

[Cor1] Graphes planaires et systemes de parentheses, Doct. Thesis, Paris, 1969.

Cori, R. and A. Machi

[CoM1] Note : construction of maps with prescribed automorphism group, *Theoret. Comput. Sci.* **21** (1982), 91 – 98.

[CoM2] Flows on hypermaps, *Glasgow Math. J.* **30** (1988), 17 – 29.

Courant, R. and H. Robbins

[CoR1] What is Mathematics, Oxford Uni. Press, 1941.

Coxeter, H. S. M.

[Cox1] Regular Polytopes, 3-rd Edition, Dover, 1973.

Crapo, H. H. and G. C. Rota

[CrR1] On the Foundation of Combinatorial Theory: Combinatorial Geometry, M.I.T. Press Cambridge, 1970.

[CrR2] Simplicial geometries, *Amer. Math. Soc. Symp.* **XIX** (1971), 71 – 75.

Cribb, D. W., R. D. Ringeisen and D. R. Shier

[CRS1] On cycle basis of a graph, *Cong. Numer.* **32** (1981), 221-129.

Crowell, R. H., R. H. Fox

[CroF1] Introduction to Knot Theory, Springer, 1963.

Cui, X. F.(崔显峰) and Y. P. Liu(刘彦佩)

[CuL1] 标准图纵横扩张的有效算法, 应用数学学报, 待发表.

Dai, W. W-M, B. Eschermann, E. S. Kuh, and M. Pedram

[DEKP1] Hierarchical placement and floorplanning in BEAR, *IEEE Tran. CAD* **8** (1989) 1335–1349.

Dambit, Ja.

[Da1] Embedding of a graph into the plane, *Latvian Math.*, Yearbook **2** (1966), 79-93.

Dantzig,G.B.

[dan1] Linear Programming and Extensions, Princeton, 1963.

Dantzig,G.B., A.J.Hoffman and T.C.Hu

[DaHH1] Triangulations(tiling) and certain block triangular matrices, *Math. Programming* **31** (1985), 1–14.

Dehn, M.

[De1] Uber Kombinatoriche Topologie, *Acta Math.* **67** (1936), 123–168.

Demoucron, G., Y.Malgrange and R.Pertuiset

[DMP1] Graphes planaires, reconnaissance et construction de representations planaires topologiques, *Rev. francaise Recherche Operationnelle* **8** (1964), 33–47.

Deo, N.

[Deo1] Note on Hopcroft and Tarjan's planarity algorithm, *J. ACM* **33** (1976), 74–75.

[Deo2] Minimum length fundamental cycle set, *IEEE Trans. Cir. Syst.* **26** (1979), 894–895.

Deo, N., G. M. Prabhu and M. S. Krishnamoorthy

[DPK1] Algorithms for generating fundamental cycles in a graph, *ACM Trans. Math. Software* **8** (1982), 26 – 42.

Dixon, E. T. and S. E. Goodman

[DG1] An algorithm for the longest cycle problem, *Networks* **6** (1976), 139–149.

Donaghey, R.

[Do1] Restricted plane tree representations of 4 M-C equations, *J. Comb. Theory* **B22** (1977), 114 – 121.

Du, D.(堵丁柱) and F. K. Hwang(黄光明)

[DuH1] A proof of the Gilbert - Pollak conjecture on the Steiner ratio, *Algorithm* **7** (1992), 121–135.

Du, D. and Y. Zhang

[DuZ1] On heuristics for minimum length rectilinear partitions, *Algorithmica* *5* (1990), 111–128.

Ehrlich, C., S. Even and R. E. Tarjan

[EET1] Intersection graphs of curves in the plane, *J. Comb. Theory* **B21**(1976),8–21.

Engle, W. L.

[En1] An algorithm for embedding graphs in the plane with certain constraints, *IEEE Trans. Cir. Theory* CT-**17** (1970), 250–252.

[En2] Theory of multiplane graphs, *IEEE Trans. Cir. Syst.* Case-**22** (1975), 2–8.

[EM1] Topological synthesis procedure for circuit integration, Proc. IEEE Int. Solid- State Cir. Conf., 1969, 138–139.

Errera, P.

[Er1] Une contribution au probleme des quatre couleurs, *Bull. Soc. Math. France* **53** (1925), 42–55.

Fanelli, S.

[F1] An unsolved conjecture on maximal planar graphical sequences, *Discrete Math.* **36** (1981), 109–112.

Fary, I.

[Fa1] On straight line representation of planar graph, *Acta Uni. Szeged. Sect. Sci. Math.* **11** (1948), 229–233.

Fiorini, S.

[Fi1] On the chromatic index of outerplanar graphs, *J. Comb. Theory* **B18** (1975), 35–38.

Fiorini, S. and R. J. Wilson

[FW1] Edge - Colorings of Graphs, Pitman, 1977.

Fisher, G. J.

[Fis1] Computer identification and extraction of planar graphs, Eng. Sc. D. Dissertation, Columbia Uni., N. Y., 1965.

Fisher, G. J. and O. Wing

[FiW1] Conputer recognition and extraction of planar graphs from the incidence matrix, *IEEE Trans. Cir. Theory* CT-**23**:2 (1966), 254–163.

Fisher, G. M.

[Fit1] On the group of all homeomorphisms of a manifold, *Trans. AMS*, **97** (1960), 193 – 212.

Fisk, S.

[Fk1] Geometric coloring theory (Part I), *Advances Math.* **24** (1977), 298–340.

[Fk2[Variation on coloring : surfaces and higher dimentional manifold (Part II), *Advances Math.* **25** (1977), 226–266.

[Fk3] Cobordism and functoriality of colorings (Part III), *Advances Math.* **37** (1980), 177–211.

Fisk, C. J., D. L. Caskey and L. L. West

[FCW1] Automated circuit card etching layout, *Proc. IEEE* **55** (1967),

1971–1982.

Fleischner, H.

[Fl1] A note on line colorings of cubic graphs, *Arch. Math.* (Brno) **10** (1975), 195–197.

Fletcher, A. J.

[Fle1] Eureka: a system for laying out circuits using a single layer of interconnectors, Proc. Int. Conf. CAD, Uni. Southampton, 1972, 25–30

Francis, G. K.

[Fr1] Null genus realizibility criterion for abstract intersection sequences, *J. Comb. Theory* **7** (1969), 331–341.

Fraysseix, H. and P. Rosenstiehl

[FR1] A depth - first search characterization of planarity, *Ann. Discrete Math.* **13** (1982), 75–80.

[FR2] A characterization of planar graphs by Tremaux order, *Combinatorica* **5** (1985), 127–155.

Fraysseix, H., J. Pach and R. Pollack

[FPP1] Small sets supporting Fary embeddings of planar graphs, IMA Preprint Series No. 387, 1988.

Frederickson, G. N.

[Fre1] Fast algorithms for shortest paths in planar graphs with application, *SIAM J. Comput.* **16** (1987), 1004–1022.

Frederickson, G. N. and S. E. Hambrusch

[FrH1] Planar linear arrangements of outerplanar graphs, *IEEE Trans. Cir. Syst.* **35** :3 (1988), 323–333.

Frederickson, G. N. and R. Janardan

[FrJ1] Efficient message routing in planar networks, *SIAM J. Comput.* **18** (1989), 843 – 875.

Friedel, J. and P. Widmayer

[FrW1] A short proof of the Steiner ratio conjecture for five points, *SIAM J. Appl. Math.* **49** (1989), 960 – 967.

Fulkerson, D. R.

[Fu1] An out - of - kilter method for minimal cost flow problems, *SIAM J. Appl. Math.* **9** (1961), 18–27.

Furst, M. L., J. L. Gross and L. A. McGeoch

[FGM1] Finding a maximum - genus graph embedding, *J. ACM* **35** (1988), 523–534.

Garey, M. R. and D. S. Johnson

[GJ1] Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP - Completeness, W. H. Freeman, 1979.

Gauss, C. F.

[Gau1] Werke(Teubner, Leipzig, 1900)**272**, 282–286.

Gerards, A. M. H.

[G1] A short proof of Tutte's characterization of Totally unimodular matrices, *Linear Algeb. Appl.* **114/115** (1989), 207 – 212.

Gerez, S. H. and O. E. Herrmann

[GH1] Switchbox routing by stepwise reshaping, *IEEE Trans. CAD* **8** (1989), 1350–1361.

Gibbs, N. E.

[Gb1] Generation of all the cycles of a graph from a set of basic cycles, *Commun. ACM* **18** (1975), 310.

[Gb2] A cycle generation algorithm for finite undigraph, *J. ACM* **16** (1969), 564–568.

Giblin, P. J.

[Gi1] Graphs, Surfaces and Homology (An Introduction to Algebraic Topology), Chapman and Hall, 1977.

Glover, H. and J. Huneke

[GlH1] Graphs with bounded valence that do not embed in projective plane, *Discrete Math.* **18** (1977),155–165.

[GlH2] The set of irreducible graphs for the projective plane is finite, *Discrete Math.***22**(1978), 243–256.

Glover, H., J. Huneke and C. S. Wang

[GHW1] 103 graphs that are irreducible for the projective plane, *J. Comb. Theory* **B27**(1979), 232–370.

Goldstein, A. J.

[Go1] An efficient and constructive algorithm for testing whether a graph can be imbedded in a plane, Graph Comb. Conf., Princeton Uni., 1963.

Goldstein, A. J. and D. G. Schweikert

[GS1] A proper model for testing the planarity of electrical circuits, *Bell Syst. Tech. J.* **52** (1973), 135 – 142.

Golumbic, M. C.

[Gol1] Comparibility graphs and a new matroid, *J. Comb. Theory* **B22** (1977), 68 – 90.

[Gol2] Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs, Acad. Press, 1980.

Gonzalez, T. F. and S. L. Lee

[GL1] A linear time algorithm for optimal routing around a rectangle, *J. ACM* **35** (1988), 810–831.

Gonzalez, T. F. et al

[GM1] An approximation algorithm for the via placement and related problems, *IEEE Trans. CAD* **8** (1989), 219–228.

Gonzalez, T. and S. Q. Zheng

[GZ1] Approximation algorithms for partitioning a rectangle with interior points, *Algorithmica* **5** (1990), 11–42.

Gordon, C. McA. and J. Luecke

[GorL1] Knots are determined by their complements, *J. Amer. Math. Soc.* **2** (1989), 371 – 415.

Goto, S. and E. S. Kuh

[GK1] An approach to the two-dimentional placement problems in the circuit layout, *IEEE Trans. Cir. Syst.* Case-**25** (1978), 208–214.

Grace, D. W.

[Gr1] Computer search for non-isomorphic convex polyhedra, Tech. Rep. CS15, Comput. Sci. Dept., Stanford Uni., 1965.

Gross, J. L. and T. W. Tucker

[Gro1] Topological Graph Theory, John Wiley & Sons, 1987.

· Grunbaum, B.

[Gru1] Arrangements and Spreads, Reg. Conf. Ser. in Math. No.10, AMS, 1972.

[Gru2] Shortness exponents of families of graphs, *J. Comb. Theory* **14** (1973), 346 – 385.

Grunbaum, B. and G. C. Shephard

[GrS1] The theorem of Euler and Eberhard for tilings of the plane, *Resultate Math.* **5** (1982), 19 – 44.

Grunbaum, B. and J. Zaks

[GrZ1] The existence of certain planar maps, *Discrete Math.* **10** (1974), 93 – 115.

Gustin, W.

[Gu1] Orientable embedding of Cayley graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.* **69** (1963), 272–275.

Hagerup, T., M. Chrobak and K. Diks

[HCD1] Optimal parallel 5 – coloring of planar graphs, *SIAM J. Comput.* **18** (1989), 288 – 300.

Haken, W.

[H1] An existence theorem for planar maps, *J. Comb. Theory* **14** (1973), 180–184.

Halin, R.

[Ha1] Bemerkung uber ebene Graphen, *Math. Ann.* **153** (1964), 38–46.

Hall, D. W.

[Hal1] Coloring seven - circuits, in Graphs and Combinatorics, Springer, Vol.**406**, 1974, 273–290.

[Hal2] On golden identities for constrained chromials, *J. Comb. Theory* **11** (1971), 287–298.

Hall, D. W. and D. C. Lewis

[HL1] Coloring six - rings, *Amer. Math. Soc. Trans.* **64** (1948), 184–191.

Hall, D. W., J. W. Siry and B. R. Vanderslice

[HSV1] The chromatic polynomial of the trancated icosahedron, *Proc. Amer. Math. Soc.* **16** (1965), 620–628.

Hammer, P. L.(彼得 · 哈默) & Y. P. Liu(刘彦佩)

[HL1-2] 序关系与 0 – 1 规划问题 (in Chinese with English abstract) (I), 数学研究与评论 **8** :2 (1988), 315 – 325; (II), 同上期刊 **8** :3 (1988), 481 – 489.

Hammer, P. L., Y. P. Liu(刘彦佩) & B. Simeone

[HLS1-3] 组合最优化中的布尔方法 (in Chinese with English abstract) (I), 数学研究与评论 **10** :2 (1990), 300 – 312; (II), 同上期刊 **10** :3 (1990), 455–468; (III), 同上期刊 **10** :4 (1990), 619–628.

Hansmann, E. C., G. Lago and D. H. Dobbs

[HaLD1] Planar equivalent network for non-planar networks derived by matrix methods, Proc. 3-rd Ann. Allerton Conf. Cir. Syst., 1965, 844.

Harary, F.

[Har1] Recent progress in topological graph theory, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **15**(1964), 405–412.

Harary, F., R. Karp and W. T. Tutte

[HKT1] A criterion for the planarity of the square of a graph, *J. Comb. Theory*, **2** (1967), 395–405.

Harary, F. and W. T. Tutte

[HT1] A dual form of Kuratowski's theorem, *Canad. J. Bull.* **8** (1965), 17 – 20.

Hassian, R.

[Has1] Maximum flow in (s,t) planar networks, *Inform. Process. Lett.* **13** (1981), 107.

[Has2] On multicommodity flows in planar graphs, *Networks* **14** (1984), 225–235.

Hassian, R. and D. B. Johnson

[HasJ1] An $O(n \log^2 n)$ algorithm for maximum flow in undirected planar networks, *SIAM J. Comput.* **14** (1985), 612–624.

Heawood, P. J.

[Hb1] Map colour theorem, *Quart. J. Math.* **24** (1890), 332–338.

[Hb2] On extended congruences connected with the four color theorem, *Proc. London Math. Soc.* 2-nd Series **33** (1932), 253–266.

[Hb3] Failures in congruences with the four color theorem, ibid. **40** (1936), 189 – 202.

[Hb4] Note on a correction in a paper on map - congruences, *J. London Math. Soc.* **18** (1943), 160 – 167.

[Hb5] Note on a correction in a paper on map - congruences, ibid. **19** (1944), 18 – 22.

Heesch, H.

[He1] Untersuchungen zum Vierfarbenproblem, B. I. Hochschulskripten, 81a/ 810a/ 810b, Bibliog. Institute, Manuheim, 1969.

[He2] Chromatic reduction of the triangulations $T_e, e = e_5 + e_7$, *J. Comb. Theory* **13** (1972), 46 – 53.

Hell, P.

[Hell] Absolute planar retracts and the four color problem, *J. Comb. Theory* **17** (1974), 5 – 10.

Hilbert, D. and S. Cohn-Vossen

[HiC1] Anschauliche Geometrie, Julius Springer, 1932.

Hobbs, A. M.

[Ho1] A survey of thickness , in Recent Progress in Combinatorics, ed. by W. T. Tutte, 1969, 255–264.

Hobbs, A. M. and G. W. Grossman

[HG1] A class of thickness - minimal graphs, *J. Res. Nat. Bur. Standards* **72B** (1968), 145–153.

[HG2] Thickness and connectivity in graphs, *J. Res. Nat. Bur. Standards* **72B** (1968), 239–244.

Holton, D. A. and B. D. McKay

[HM1] The smallest non-Hamiltonian 3-connected cubic planar graphs have 38 vertices, *J. Comb. Theory* **B45** (1988), 305–319. Erratum, in ibid. **B47** (1989), 248.

Hopcroft, J.

[Hop1] An $n \log n$ algorithm for isomorphism of planar triply connected graphs, in Theory of Machines and Computation, ed. by Z. Kohavi et al, Acad. Press, 1971, 189 – 196.

Hopcroft, J. and R. Tarjan

[HoT1] Planarity testing in $V \log V$ steps: extended abstract, Proc. IFIP Cong., 1971, 85 – 90.

[HoT2] A V^2 algorithm for determining isomorphism of planar graphs, *Inform. Process. Lett.* **1** (1971), 32 – 34.

[HoT3] Isomorphism of planar graphs, in Compexity of Computer Computations, ed. by R. Miller et al, Plenum, 1972, 131 – 152.

[HoT4] Dividing a graph into triconnected components, *SIAM J. Comput.* **2** (1973), 135 – 158.

[HoT5] Efficient planarity testing, *J. ACM* **21** (1974), 549 – 568.

Hopcroft, J. E. and J. K. Wong

[HW1] Linear time algorithm for isomorphism of planar graphs (extended abstract), 6-th Ann. ACM Symp. Comput., Seattle, 1974.

Hope, A. K.

[Hp1] A planar graph drawing program, *Solfware - Practice and Experience* 1 (1971), 82 – 91.

Horton, J. D.

[Hr1] A polynomial - time algorithm to find the shortest cycles basis of a graph, *SIAM J. Comput.* **16** (1987), 358 – 366.

Hotz, G.

[Ht1] The embedding of graphs in the 2 - sphere, *Z. Angew. Math. Mech.* **45** (1965).

[Ht2] Embdding of graphs in the plane, *Math. Ann.* **167** (1966), 214 – 223.

Hu, T. C.(胡德强)

[Hu1] Multicommodity network flows, *Oper. Res.* **11** (1973), 344–360.

Hu, T. C. and S. E. Kuh

[HuK1] Theory and concepts of circuit layout, in VLSI Circuit Layout: Theory and Design, IEEE Press, 1985, 3 – 18.

Hubicka, E. and M. M. Syslo

[HS1] Minimal basis of cycles of a graph, in Recent Adv. in Graph Theory, (ed. by M. Fiedler) Acad . Praha, 1975, 283 – 293.

Huneke, J.

[Hun1] On the genus of a graph, *Proc. Symp. Pure Math.* **24** (1979),

357–364.

Hurkens, C. A. J., A. Schrijver and E. Tardos

[HST1] On fractional multicommodity flows and distance functions, *Discrete Math.* to appear

Inukai, T. and L. Weinberg

[IW1] Planar, coplanar, and totally planar n- port networks, *IEEE Trans. Cir. Syst.* Case - **23** (1976).

Iri, M.

[I1] Network Flow, Transportation and Scheduling, Acad. Press, 1969.

Itai, A., C. H. Papadimitriou and J. L. Szwarcfiter

[IPS1] Hamilton paths in grid graphs, *SIAM J. Comput.* **11**:4 (1982), 676 – 686.

Itai, A. and Y. Shiloach

[IS1] Maximum flow in planar networks, *SIAM J. Comput.* **8** (1979), 135 – 150.

Jaeger, F.

[J1] Flows and generalized coloring theorems in graphs, *J. Comb. Theory* **B26** (1979), 205 – 216.

Jayakumar, R., K. Thulasiraman and M. N. S. Swamy

[JKS1] Planar embeddings: Linear time algorithms for vertex placement and edge ordering, *IEEE Tran. Cir. Syst.* **35** :3 (1988), 334 – 344.

Jayakumar, R., et al

[JM1] $O(n^2)$ algorithms for graph planarization, *IEEE Tran. CAD* **8** (1989), 257 – 267.

Jones, V. F. R.

[Jon1] A polynomial invariant for links via Von Neumann algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.* **12** (1985), 103 – 112.

Kampen, G. R.

[K1] Orienting planar graphs, *Discrete Math.* **14** (1976) 337 – 341.

Kapoor, S. and P. Ramanan

[KR1] Lower bounds for maximal and convex layers problems, *Algorithmica* **4** (1989), 447 – 459.

Karp, R. M.

[Ka1] Computational complexity of combinatorial problems, *Networks* **5** (1975), 45 – 68.

Kauffman, L. H.

[Kaa1] New invariants in knot theory, *Amer. Math. Monthly* **95** :3 (1988), 195 – 243.

[Kaa2] A Tutte polynomial for signed graphs, *Discrete Math.* **25** (1989), 105–127.

Kaufman, A.

[Kaf1] Graphs, Dynamic Programming and Finite Games, Acad. Press, 1967.

Kaufmann, M.

[Kau1] A linear time algorithm for routing in a convex grid, *IEEE Tran. CAD* **9** (1990), 180 – 184.

Kempe, A. B.

[Ke1] On the geographical problem of the four colours, *Amer. J. Math.* **2** (1879), 193 – 200.

Kirkpatrick, D. G.

[Ki1] Optimal search in planar subdivision, *SIAM J. Comput.* **12** (1983), 28 – 35.

Kleinert, M.

[Kle1] The thickness of the n-dimentional cube, *J. Comb, Theory* **3** (1967),10–15.

Knauer, B.

[Kn1-2] Normalformen planar graphen I, II, *Computing* **10** (1972), 121 – 136; 137 – 152.

[Kn3] A simple planarity criterion, *J. ACM* **22** (1975), 226 – 230.

Knuth, D. E.

[Knu1] The Art of Computer Programming(Vol.3), Addison - Wesiey, 1973.

Kodres, U. R.

[Kod1] Problem No.E1465, *Amer. Math. Monthly* **68**(1961), 379.

[Kod2] Logic circuit layout, Proc. Joint Conf. Math. CAD, Anaheim, CA, 1969, 165 – 191.

Kolasinska, E.

[Kol1] On a minimum cycle basis of a graph, *Zastos. Mat.* **16** (1980), 631 – 639.

Koppe, R.

[Kp1] Automatische Abbildung eines planaren Graphen in die Ebene mit beliebig vorgebbaren Ortern der Knotenbilder, *Computing* **20** (1978), 61 – 73.

Kotzig, A.

[Kq1] Change graphs of edge-colorings of planar cubic graphs, *J. Comb. Theory* **B22** (1977), 26 – 30.

[Kq2] Eulerian lines in finite 4-valent graphs and their transformations, in Theory of Graphs (eds. by Erdos et al) , Proc. Colloq. Tikany, Hungary, 1964, 219 – 230.

Krentel, M. W.

[Kr1] The complexity of optimization problems, *J. Comput. Syst. Sci.* **36** (1988), 190 – 509.

Kung, J. P. S.

[Ku1] A Source Book in Matroid Theory, Birkhauser, 1986.

Kuo, C. L.

[Ku1] Linear Network and System, McGraw - Hill, 1967.

Kuratowski, K.

[Kur1] Sur le Problem des Courbes Gauches en Topologie, *Fund. Math.* **15** (1930), 271 – 283.

Lai, Y.-T. et al

[LaM1] Algorithms for floorplan design via rectangular dualization, *IEEE Tran. CAD* **7** (1988), 1278 – 1289.

Larson, J. A.

[Lar1] Some graphs with chromatic number three, *J. Comb. Theory* **B26** (1979), 317 – 322.

Larson, R. C. and V. O. Li

[LL1] Finding minimum rectilinear distance paths in the presence of barries, *Networks* **11** (1981), 285 – 304.

Lawler, E. L.

[Law1] Combinatorial Optimization : Networks and Matroids, Holt, Rinehart and Winston, 1976.

Lebesgue, H.

[L1] Quelques consequences simples de la formule d'Euler, *J. de Math.* **9** (1940), 27 – 43.

Lee, D. T. and F. P. Preparata

[LeP1] Location of a point in a planar subdivision and its applications, 8-th Ann. ACM Symp. Comput., 1976, 231 – 235.

Lefschetz, S.

[Lef1] Planar graphs and related topics, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **54** (1965), 1763 – 1765.

[Lef2] Applications of Algebraic Topology: Graphs and Networks, Springer, 1975.

Lempel, A., S. Even and I. Cederbaum

[LEC1] An algorithm for planarity testing of graphs, in Graph Theory (ed. by P. Rosenstiehl),Proc. Inter. Symp., Rome, 1967, 215.

Lenganer, T.

[Len1] Hierarchical planarity testing algorithms, *J. ACM* **36** (1989), 474 – 509.

Lerda, F. and E. Majoranic

[LM1] An algorithm for connecting n points with a minimum number of crossings,*Calcolo* 1(1964),257–365.

Levinson, H. W.

[Lei1] Planarity of Cayley diagrams, Lect. Notes in Math., **303**, Graph Theory and Applications, Springer, 1972, 183 – 188.

Levow, R. B.

[Lev1] On Tutte's algebraic approach to the theory of crossing numbers, Proc. 3-rd S-E Conf. Comb. Graph Theory Comput., 1972, 315 – 324.

Liggett, R. and W. Mitchell

[LiM1] Optimal space planning in practice, *IEEE Trans. CAD* **13** (1981), 277 – 288.

Lin, P. M.

[Li1] On methods of deleting planar graphs, Proc. 8-th Midwest Symp. Cir. Theory, Colorado State Uni., Boulder, 1965, 11 – 19.

Lipton, R. J. and R. E. Tarjan

[LT1] A separator theorem for planar graphs, *SIAM J. Appl. Math.* **36** (1979), 177 – 189.

[LT2] Applications of a planar separator theorem, *SIAM J. Comput.* **9** (1980), 615 – 627.

Lipton, R. J., D. J. Rose and R. E. Tarjan

[LRT1] Generalized nested dissection, *SIAM J. Numer. Anal.* **16** (1979), 177 – 189.

Liu, C. L.(刘炯朗)

[Lic1] Introduction to Combinatorial Mathematics, McGraw - Hill, 1968.

Liu, Y. P.(刘彦佩)

[Liu1] 模 2 规划与平面嵌入， 应用数学学报 **1** (1978),395–406.

[Liu2] 图的平面性判定与平面嵌入， 应用数学学报 **2** (1979),350–365.

[Liu3-7] 平面图的理论与四色问题 (in Chinese with English abstract) I, 数学研究与评论 **3**:3 (1983), 122–136; II, 同上期刊 **4**:1 (1984), 121–136; III, 同上期刊 **5**:1 (1985), 125–144; IV, 同上期刊 **5**:3 (1985), 123–136; V, 同上期刊 **6**:2 (1986), 175–188.

[Liu8] 图的不可定向最大亏格 (in Chinese with English abstract), 中国科学, 数学专辑 I (1979), 191–201.

[Liu9] The maximum orientable genus of a graph, *Scientia Sinica* Special Issue on Math. II (1979), 41–55.

[Liu10] 若干典型图类的最大亏格, 数学学报 **24** (1981), 817–832.

[Liu11] 关于 Edmonds 曲面对偶定理的一个注记, 运筹学杂志 **2:1** (1983), 62–63.

[Liu12] 图 $K_n - K_3$ 的可定向亏格, 科学通报 (Chinese Ed.) **25** (1980), 959; 或 *KEXUE TONGBAO* (English Ed.) **26** (1981), 188.

[Liu13-17] 地图着色定理与图的曲面嵌入 I, 数学的实践与认识 No.1 (1981), 65–78; II, 同上期刊 No.2 (1981), 59–69; III, 同上期刊 No.3 (1981), 33–44; IV, 同上期刊 No.4 (1981), 33–41; V, 同上期刊 No.1 (1982), 34–44.

[Liu18] 四色问题, 中国大百科全书, 数学卷 (1988), 623–624.

[Liu19] On the linearity of testing planarity of a graph, Comb. Optim. CORR84-5,University of Waterloo,1984;Also in *Chinese Ann. Math.* **7B** (1986), 425–434.

[Liu20] Extending Kotzig's theorem into the non-orientable cases, Comb. Optim. CORR82-36, University of Waterloo, 1982.

[Liu 21] K-valent maps on the surfaces, Comb. Optim. CORR82-35, University of Waterloo, 1982; Also in *Acta Math. Appl. Sinica* Eng. Series **1** (1984), 57–62.

[Liu22] A new approach to the linearity of testing planarity of graphs, Report, Rutgers University, 1984; Also in *Acta Math. Appl. Sinica* Eng. Series **4** (1988), 257–265.

[Liu23] Boolean planarity characterization of graphs, RUTCOR Research Report RRR38-87, Rutgers University , 1987; Also in

Acta Math. Sinica New Series **4** (1988), 316–329.

[Liu24] Boolean approach to planar embeddings of a graph, RUTCOR Research Report RRR 39–87, Rutgers University, 1987; Also in *Acta Math. Sinica* New Series **5** (1989), 64–79.

[Liu25] Boolean characterizations of planarity and planar embeddings of graphs, *Ann. Operations Research* **24** (1990), 165–174.

[Liu26] On the net-embeddability of graphs, RUTCOR Research Report RRR8-90, Rutgers University, 1990. Also in *Acta Math. Sinica*, New Series **8** (1992), 413–423.

[Liu27] 图的网格可扩张性的有效识别， 科学通报 **38** (1993), 15 – 17. 或 *Chinese Science Bulletin* **38** (1993), 533 – 536.

[Liu28] Some combinatorial optimization problems arising from VLSI circuit design, Research Report Series A, No.6, Department of Statistics, University "La Sapienza" of Rome, 1992. Also in *Applied Math.* (A J. Chinese Unis.) **B8** (1993), 218—235.

[Liu29] 纵横嵌入术，科学出版社， 1994.

[Liu30] 运输、配置、定向、划分及其它，第三届全国运筹学会会刊，成都， 1992, 500–507.

[Liu31] A polyhedral theory on graphs, *Acta Math. Sinica*, New Series **10** (1994), 136–142.

Liu, Y. P.(刘彦佩), P. Marchioro and R. Petreschi

[LMP1] At most single-bend embeddings of cubic graphs, Research Report SI-92/01,Dept. Computer Science, Uni. "La Sapienza" of Rome, 1992. Also in *Applied Math.* (A J. Chinese Unis.), **B9** (1994), 127–142.

Liu, Y. P.(刘彦佩), P. Marchioro, R. Petreschi and B. Simeone

[LMPS1] Theoretical results on at most 1-bend embeddability of graphs,

Research Report Series A No.3, Department of Statistics, University of Rome "La Sapienza", 1990; Also in *Acta Math. Appl. Sinica*, Eng. Series **8** (1992), 188–192.

[LMPS2] On theoretical results of at most 1-embeddability of graphs, *Chinese Science Bulletin* **36** (1991), 1054–1055.

Liu, Y. P.(刘彦佩), A. Morgana and B.Simeone

[LMS1] On the general theoretical results for rectilinear embeddability of graphs, *KEXUE TONGBAO* (Chinese Ed.) **35** (1990). 1513–1514. Or see *Chinese Science Bulletin (KEXUE TONGBAO*, English Ed.) **36** (1991), 1490.

[LMS2] General theoretical results on rectilinear embeddability of graphs, Research Report Series A No.2, Department of Statistics, University of Rome " La Sapienza", 1990; Also in *Acta Math. Appl. Sinica* Eng. Series **7** (1991), 187–192.

[LMS3] A linear time algorithm for 3-bend embeddings of planar graphs in the grid, Research Report, Ser.A, No.1, Dept. Statistics, Uni. "La Sapienza", Rome, 1993.

[LMS4] A graph partition problem, Research Report, No.27, Inst. Appl. Math., Acad. Sinica, 1992.

[LMS5] Another linear time algorithm for finding 3-embeddings of a graph, Research Report, No.1, Inst. Appl. Math., Acad. Sinica, 1994.

[LMS6] Characterizations of a kind of orientations of a graph, Research Report, No.2, Inst. Appl. Math., Acad. Sinica, 1994.

Lodi, E., F. Luccio and L. Pagli

[LLP1] A preliminary study of diagonal channal-routing model, *Algorithmica* **4** (1989), 585 – 597.

Lomonosov, M. V.

[Loa1] Multiflow feasibility depending on cuts, *J. Graph Theory Newsletters* **9**:1 (1979), 4.

Lovasz, L.

[Lob1] Combinatorial Problems and Exercises, North - Holland, 1979.

Lovasz, L. and M. L. Marx

[LoM1] A forbidden subgraphs characterization of Gauss codes, *Bull. Amer. Math. Soc.* **82** (1976), 121 – 122.

MacLane, S.

[M1] A structural charaterisation of planar combinatorial graphs, *Duke Math. J.* **3** (1937), 460 – 472.

[M2] A combinatorial condition for planar graphs, *Fund, Math.* **28** (1937), 22 – 32.

Marx, M. L.

[Ma1] The Gauss realizability problem, *Trans. AMS* **134** (1972), 612 – 613.

Mateti, P. and N. Deo

[MD1] On algorithms for enumerating all circuits of a graph, *SIAM J. Comput.* **5** (1976). 90 – 99.

Matzumoto, K., T. Nishizeki and N. Saito

[MNS1] An efficient algorithm for finding multicommodity flows in planar networks, *SIAM J. Comput.* **14** (1985), 289 – 302.

Maxwell, N. M. and R. E. Saeks

[MR1] An application of the 4-color theorem to network theory, Proc. 3-rd Ann. Allerton Conf. Cir. Syst., 1965, 727 – 731.

Mayer, J.

[May1] Ineqalites nouvelles le probleme des quatre couleurs, *J. Comb. Theory* **B19** (1975), 119 – 149.

Melikhov, A. N., V. M. Kuleychik and V. V. Lisyak

[MKL1] Partition of a graph into plane subgraphs (in Rassian), *Cybernetics* **10** (1972),
1087–1090.

Meyniel, H.

[Me1] Les 5-colorations d'un graphe planaire forment une classe de commutation unique, *J. Comb. Theory* **B24** (1978), 251 – 257.

Milgram, M.

[Mil1-2] Irreducible graphs I, *J. Comb. Theory* **B12** (1972), 6–31 ; II, ibid. **B14** (1973), 7–45.

Mitchem, J.

[Mit1] Hamitonian and Eulerian properties of entire graphs, Lect. Notes in Math., **303**, Graph Theory and Applications, Springer, 1972, 189 – 196.

Mondshein, L.

[Mo1] Combinatorial ordering and embedding of graphs, Tech. Note 1971 – 35, Lincohn Lab., M.I.T., 1971.

Montanari, U. G.

[Mon1] Separable graphs, planar graphs and web grammars, *Inf. Control* **16** (1970), 243 – 267.

Mount, D. M.

[Mou1] on finding shortest paths on convex polyhedra, Tech. Rep., Comput. Sci. Dept., Uni. Maryland, 1984.

Mullin, R. C. and P. J. Schellenberg

[MuS1] The enumeration of c-nets via quadrangulations, *J. Comb. Theory* **4** (1968), 259–276.

Nash-Williams, C. St. J. A.

[Na1] Edge-disjoint spanning trees of finite graphs, *J. London Math. Soc.* **36** (1961), 445–450.

Okamula, H. and P. D. Seymour

[OS1] Multicommodity flows in planar graphs, *J. Comb. Theory* **B31** (1981), 75–81.

Ore, O.

[Ore1] Theory of Graphs, AMS, 1962.

[Ore2] The Four Color Problem, Acad. Press, 1967.

Ore, O. and J. Stemple

[OrS1] Numerical calculations on the four-color problem, *J. Comb. Theory* **8** (1970), 65 – 78.

Orlowski, M.

[Orl1] A new algorithm for the largest empty rectangle problem, *Algrorithmica* **5** (1990), 65 – 73.

Owens, A. B.

[Ow1] Graphs and printed circuit embeddings, A survey and bibliography, Naval Res. Lab., Washington D. C., Bibl. No. 33, 1969.

Paton, K.

[Pa1] An algorithm for finding a fundamental set of cycles of a graph, *Comm. ACM,* **12** (1969), 514 – 518.

Pralts, J. L.

[Pb1] Computer Data Structure, McGraw-Hill, 1977.

Picard, C.

[Pi1] Graphes complementaires et graphes planaires, *Rev. Francais Informat. Rech. Operat.* **8** (1964), 329 – 343.

Platt, C. R.

[Pla1] Planar lattices and planar graphs, *J. Comb. Theory* **B21** (1976), 30 -39.

Plesnevic, G. S.

[Ple1] Embedding a graph in the plane, *Vycislitellnye Sistemy* **6** (1963), 45 – 53.

Plummer, M. D.

[Plu1] On the cyclic connectivity of planar graphs, *Lect. Notes in Math.* **303** (1972), 234–242.

Read, R. C.

[R1] Graph theory algorithms, Graph Theory and its Applications (ed. by B. Harris), Acad. Press, 1970, 51 – 78.

[R2] A note on tiling rectangles with dominoes, *Fibonacci Quart.* **18** :1 (1980), 24 – 27.

[R3] The dimer problem for narrow rectangular arrays : a unified method of solution, and some extensions, *Aequationes Math.* **24** (1982), 47 – 65.

Read, R. C. and P. Rosenstiehl

[RR1] On the Gauss crossing problem, Combinatorics (eds. by Hajnal *et al*), North - Holland, 1978, 843 – 876.

Reidemeister, K.

[Re1] Knot Theory (English Edition), BCS Associate, 1883.

Reif, J. H.

[Rei1] Minimum s - t cut of a planar undirected network in $O(n \log^2 n)$ time, *SIAM J. Comput.* **12** (1983), 71 – 81.

de Rezende, P. J., D. T. Lee and Y. F. Wu

[RLW1] Rectilinear shortest paths in the presence of rectangular barriers, *Discrete Comput. Geom.* **4** (1989), 41 – 53.

Richter, B.

[Rh1] Cubic graphs with crossing number two, *J. Graph Theory* **12:3** (1988), 363 – 374.

Rim, C. S. *et al*

[RiM1] Exact algorithms for multilayer topotogical via minimization, *IEEE Trans. CAD* **8** (1989), 1165 – 1173.

Ringel, G.

[Rin1] The torodial thickness of complete graphs (in German),*Math. Z.* **87** (1985), 14–26.

[Rin2] Farbungsprobleme auf Flachen und Graphen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschafteng, 1959.

[Rin3] Map Color Theorem, Springer, 1974.

Robertson, N. and P. Seymour

[RS1] Graph minors VIII: Kuratowski theorem for general surfaces, Preprint.

[RS2] Generalizing Kuratowski's theorem, *Cong. Numer.* **45** (1984), 129–138.

[RS3] Graph minors - A survey, in Survey in Combinatorics, 153–171, London Math. Soc. Lect. Notes Ser., Vol.105, Cambridge Uni. Press, 1975.

Rose, N. A. and J. V. Oldfield

[RO1] Printed - wiring - board layout by computer, *Electronics and Power* Oct. (1971), 376–379.

Rosenstiehl, P.

[Ro1] Bicycles et diagonales des graphes planaires, Colloq. sur Theorie des Graphes, Paris, 1974; Also in *Cahier Centre Etudes Rech. Oper.* **17** (1975), 365–383.

[Ro2] Caracterisation des graphes planaires par une diagonale absreacte, *Cong. Numer.* **15**(1976), 521–527.

[Ro3] Preuve algebrique du critere de planarite de Wu(吴文俊) Liu(刘彦佩), *Ann. Discrete Math.* **9** (1980), 67 – 78.

[Ro4] Solution algebrique du probleme de Gauss sur la permutation des points d'intersection d'une ou plusieurs courbes fermees du plan, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris* t.**283**:8 (1976), 551 – 553.

Rosenstiehl, P. and R. C. Read

[RoR1] On the principal edge tripartition of a graph, *Ann. Discrete Math.* **3** (1978), 195 – 226.

Rosenstiehl, P. and R. Tarjan

[RT1] Rectilinear planar layouts and bipolar presentations of planar graphs, *Discrete Comput. Geom.* **1** (1986), 343 – 353.

[RT2] Gauss codes, planar Hamiltonian graphs and stack - sortable permutations, *J. Algorithms* **5** (1984), 375 – 390.

Rubin, F.

[Ru1] A note on Lerda and Majoronic's minimum crossing algorithm, *Calcolo* **11** (1974), 201–203.

[Ru2] An algorithm for testing the planarity of a graph, IEEE Computer Group Repositery, R74 – 73, 1974.

[Ru3] An improved algorithm for testing the planarity of a graph, *IEEE Trans. on Computers* C-**24** (1975), 113 – 121.

Saab, Y. G. and V. B. Rao

[SaR1] Fast effective heuristics for the graph bisectioning problem, *IEEE Trans. CAD* **9** (1990), 91 – 98.

Saaty, T. L.

[S1] Remarks on the four-color problem :The Kempe catastrophe, *Math. Mag.* **40** (1967), 31 – 36.

[S2] Thirteen colorful variations on Guthries four-color conjecture, *Amer. Math. Monthly.* **79** (1972), 2 – 43.

Sachs, D.

[Sa1] Graphs, matroids and geometric lattices, *J. Comb. Theory* **9** (1970), 192 – 199.

Sarrafzadeh, M. and D. T. Lee

[SL1] A new approach to topological via minimization, *IEEE Trans. CAD* **8** (1989), 890 – 900.

Schrijver, A.

[Sch1] Distances and cuts in planar graphs, *J. Comb. Theory* **B46** (1989), 46–57.

Schweikert, D. G. and B. W. Kermighan

[ScK1] A proper model for the partitioning of electrical circuits, Proc. 9-th Design Autom. Worhshop, Dallas, 1971, 57–62.

Serre, J - P.

[Se1] Trees, Springer, 1980.

Seymour, P. D.

[Sey1] On odd cuts and plane multicommodity flows, *Proc. London Math. Soc.* **42**: 3 (1981),178–192.

[Sey2] Nowhere- zero 6-flows, *J. Comb. Theory* **B30** (1981), 130 – 135.

[Sey3] On Tutte's extension of the four color problem, *J. Comb. Theory* **B31** (1981), 82 – 94.

[Sey4] Matroid representation over $GF(3)$, *J. Comb. Theory* **B26** (1979), 159 – 173.

[Sey5] Decomposition of regular matroids, *J. Comb. Theory* **B28** (1980), 305 – 359.

Shank, H.

[Sh1] The theory of left - right paths, Combinatorical Mathematics III, Lect. Notes in Math. **452**, Springer, 1975, 42–54.

Sharir, M.

[Sha1] On shortest paths amidst convex polyhedra, *SIAM J. Comput.* **16** (1987), 561 –572.

Sharir, M. and A. Schorr

[SS1] On shortest paths in polyhedral spaces, *SIAM J, Comput.* **15** (1980), 193 – 215.

Shih, Z.-C., R. C. T. Lee and S. N. Yang

[SLY1] A systolic algorithm for extracting regions for a planar graph, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* **47** (1989), 227 – 242.

Shirakawa, I., H. Takahashi and H. Ozaki

[STO1] On the decomposition of a graph into planar subgraphs, *J. Franklin Inst.* **238** (1987), 379–388.

[STO2] On the planar decomposition of a complete bipartite graph, *SIAM J. Appl. Math.* **16**, 404–416.

Shirey, R. W.

[Shi1] Implementation and analysis of efficient graph planarity testing algorithms, Ph. D. Thesis, Uni. Wisconsin, 1969.

Skupien, Z.

[Sk1] Locally Hamiltonian graphs and Kuratowski theorem, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astronom. Phys.* **13** (1965), 615 – 619.

[Sk2] Locally Hamltonian and planar graph, *Fund. Math.* **58** (1966), 193 – 200.

Stacey, K. C. and D. A. Holton

[St1] On the automorphism group of a tree, *J. Comb. Theory* **B22** (1977), 10 – 25.

Stahl, S.

[Sta1] Generalized embedding schemes, *J. Graph Theory* **2** (1978), 41–52.

[Sta2] A combinatorial analog of the Jordan curve theorem, *J. Comb. Theory* **B35** (1983), 1–21.

Stahl, S. and L. W. Beineke

[StB1] Blocks and non-orientable genus of graphs,*J. Graph Theory* **1** (1977), 75–78.

Stepanec, G. F.

[Ste1] Basis systems of vector cycles with extremal properties (in Russian), *Uspekhi Mat. Nauk* **19** (1964), 171 – 175.

Storer, J. A.

[Sto1] The node cost measure for embedding graphs in the planar grid, Proc. 12-th ACM Symp. Comput., 1980, 201 – 210.

Stremquist, W.

[Str1] The four color theorem for small maps, *J. Comb. Theory* **B19** (1975), 256 – 268.

Sun, X. R.(孙晓荣)

[Sun1] 关于吴 (文俊) - 刘 (彦佩) 定理判别图的平面性的复杂性, (in Chinese with English abstract), 计算机学报 **12**: 1 (1989), 33–37.

[Sun2] 吴 (文俊) - 刘 (彦佩) 定理与图的平面性判别, 硕士论文, 中国科学院应用数学研究所, 1987.

Syslo, M. M.

[Sy1] An efficient cycle vector space algorithm for listing all cycles of a planar graph, *SIAM J. Comput.* **10** (1981), 797 – 808.

Tamassia, R.

[Ta1] On embedding a graph in the grid with the minimum number of bends, *SIAM J. Comput.* **16** (1987), 421 – 444.

Thistlethwaite, M. B.

[Te1] A spanning tree expansion of the Jones polynomial, *Topology*, **26** (1987), 197 – 309.

Thomassen, C.

[Th1] Planar and infinite hypohamiltonian and hypotraceable graphs, *Discrete Math.* **14** (1976), 377 – 289.

[Th2] Rectilinear drawings of graphs, *J. Graph Theory* **12** (1988), 335 – 341.

Ting, B. S., E. S. Kuh and I. Shirakawa

[TKS1] The multilayer routing problem: some necessary and sufficient conditions, Memo ERL- M559, College of Engineering, Uni. Calf., Berkley, Ca., 1975.

[TKS2] The multilayer routing problem: algorithms and necessary and sufficient conditions for the single - row single - layer case, *IEEE Trans. Cir. Syst.* Case-**23** (1976), 768 – 778.

Titus, C. J.

[Ti1] A theory of normal curves and some applications, *Pacific J. Math.* **10** (1960), 1083 – 1096.

Treybig, L. B.

[Tr1] A characterization of the double point structure of the projection of a polygonal knot in regular position, *Trans. AMS* **130** (1968), 223 – 247.

Trotter, H. F.

[Tro1] Noninvertible knots, *Topology*, **2** (1964), 275 – 280.

Trotter, W. T. and J. I. Moore Jr.

[TrM1] The dimension of planar posets, *J. Comb. Theory* **B22** (1977), 54–67.

Truemper, K.

[Tru1] On balanced matrices and Tutte's characterizatiom of regular matroids, *J. Comb. Theory* **B32** (1982), 112 – 139.

Tutte, W. T.

[Tut1] On the non-biplanar character of the complete 9-graph, *Canad. Math. Bull.* **6** (1963), 319–330.

[Tut2] The thickness of a graph , *Indag. Math.* **25** (1963), 567–577.

[Tut3] Bridges and Hamiltonian circuits in planar graphs, *Aequa. Math.*

15 (1977), 1-33.

[Tut4] A class of Abelian groups, *Canad. J. Math.* **8** (1956), 13-28.

[Tut5] The subgraph problem, *Ann. Discrete Math.* **3** (1978), 289 - 295.

[Tut6] On the four color conjecture, *Proc. London Math. Soc.* **50** (1948), 137 - 149.

[Tut7] A theorem on planar graphs, *Trans. AMS* **82** (1956), 99 - 116.

[Tut8] How to draw a graph, *Proc. London Math. Soc.* Ser.3 **13** (1963), 743 - 768.

[Tut9-10] A homotopy theorem for matroids I, *Trans. AMS* **88** (1958), 144 - 160; II, ibid. **88** (1958), 161 - 174.

[Tut11] Matroids and graphs, *Trans. AMS* **90** (1959), 527 - 552.

[Tut12] An algorithm for determining whether a given binary matroid is graphic, *Proc. AMS* **11** (1960), 905 - 917.

[Tut13] A contribution to the theory of chromatic polynomials, *Canad. J. Math.* **6** (1954), 80 - 91.

[Tut14] On the problem of decomposing a graph into n connected factors, *J. London Math. Soc.* **36** (1961), 221-230.

[Tut15] Convex representations of graphs, *Proc. London Math. Soc.* **10** (1960), 304 - 320.

[Tut16] Toward a theory of crossing numbers, *J. Comb. Theory* **8** (1970), 45 - 53.

[Tut17] Connectivity in Graphs, Oxford Uni. Press, 1966.

[Tut18] Introduction to the Theory of Matroids, Amer. Elsevier, 1971.

[Tut19] Graph Theory, Encycl. Math. **21**, Addison - Wesley, 1984.

Tutte, W. T. and H. Whitney

[TW1] Kempe chains and four color problem, *Utilitas Math.* **2** (1972),

241 – 281.

Ulrich, J. W.

[U1] A computational theory of planar embedding, Ph. D. Thesis, Uni. Texas, Austin, 1968.

[U2] A characterization of planar oriented graphs, *SIAM J. Appl. Math.* **18** (1970), 364 – 371.

Unger, P.

[Un1] A theorem on planar graphs, components, and subgraphs, *J. London Math. Soc.* **26** (1951), 256 – 262.

Valiant, L. G.

[V1] Universality consideration in VLSI circuits, *IEEE Trans. Comput.* C-**30** (1981), 135 – 140.

Vanlier, M. C. and R. H. Otten

[VaO1] On the mathematical formulation of the wiring problem, *Inter. J. Cir. Theory Appl.* **1** (1973), 137 – 147.

Vartak, M. N. and H. Narayanan

[VN1] New proof of 4 - colourability of a class of graphs, *J. Indian Math. Soc.* (N.S.) **38** (1974), 201 – 205.

Vince, A. and C. H. C. Little

[VL1] Discrete Jordan curve theorem, *J. Comb. Theory* **B47** (1989), 251–261.

Walsh, T. R. S.

[Wa1] Characterizing the vertex neighbourhoods of semi - regular polyhedra, *Geometriae Dedicata* **1** (1972), 117 – 123.

Walther, H.

[Wal1] On the number of vertices in a longest circuit in a planar cubic 3-vertex connected graphs, *Studia Sci. Math. Hungar.* **2** (1967), 391 – 398.

Weinberg, L.

[We1] On the maximum order of the automorphism group of a planar triply connected graphs, *J. SIAM* **July** (1966).

[We2] A simple and efficient algorithm for determining isomorphism of planar triply connected graphs, *IEEE PGEC* **13** (1966), 142 – 148.

[We3] Plane representations and codes for planar graphs, Proc. 3–rd Ann. Allerton Conf. Cir. Syst., 1965, 733 – 744.

[We4] Algorithms for determining automorphism groups for planar graphs, Proc. 3-rd Ann. Allerton Conf. Cir, Syst., 1965, 913 – 929.

[We5] Additional simple codes for planar graphs, Proc. 4-th Allerton Conf. Cir. Syst., 1966.

[We6] Alternative algorithms for determining isomorphism, automorphisms and automorphism groups of planar graphs, Proc. 4-th Allerton Conf. Cir. Syst., Uni. Ill., 1966.

[We7] Two new characterizations of planar graphs, Proc. 5-th Allerton Conf. Cir. Syst.,1967, Uni. Ill., 1967.

[We8] Planar graphs and matroids, Lect. Notes in Math. **303**, Springer, 1972, 313 – 329.

Weinberg, L. and P. Slepian

[WP1] Series - parallel networks, *IRE Trans. PGCT* CT-4:3 (1957).

Welsh, D. J. A.

[Wel1] Matroid Theory, Acad. Press, 1976.

de Werra, D.

[Wer1] How to color a graph, a survey, in Combinatorial Programming: Methods and Applications, D. Reidel Publ. Comp., 1975, 305 – 323.

White, A. T.

[Whe1] Graphs, Groups and Surfaces, North - Holland, 1973.

White, N. L.

[Whn1] Theory of Matroids (ed.), Cambridge Uni. Press, 1986.

[Whn2] Combinatorial Geometries (ed.), Cambridge Uni. Press, 1987.

[Whn3] Matroid Applications (ed.), Cambridge Uni. Press, 1992.

Whitney, H.

[Wht1] A theorem on graphs, *Ann. Math.* **32** (1931), 378-390.

[Wht2] Congruent graphs and the connectivity of graphs, *Amer. J. Math.* **54** (1932), 150–168.

[Wht3] A set of topological invariants for graphs, *Amer. J. Math.* **55** (1933), 231–135.

[Wht4] On the classification of graphs, *Amer. J. Math.* **55** (1933), 236–244.

[Wht5] The coloring of graphs, *Ann. Math.* **33** (1932), 688 – 718.

[Wht6] Non-separable and planar graphs, *Trans. AMS* **34** (1932), 339 – 162.

[Wht7] Planar graphs, *Fund. Math.* **21** (1933), 73 – 84.

[Wht8] 2 - isomorphic graphs, *Amer. J. Math.* **55** (1933), 245 – 254.

[Wht9] On regular closed curves in the plane, *Compositio Math.* **4** (1937), 276 – 284.

[Wht10] On the absteact properties of linear dependence, *Amer. J. Math.* **57** (1935),509 – 533.

Wilde, P. J.

[Wi1] Matroids with given restrictions and contractions, *J. Comb. Theory* **B22** (1977), 122 – 130.

Willamson, S. G.

[Wil1] Embedding graphs in the plane - algorithm aspects, *Ann. Discrete Math.* **6** (1980), 349 – 384.

Williams, N. H.

[Wl1] Combinatorial Set Theory, North - Holland, 1977.

Winn, C. E.

[Wn1] On the minimum number of polygons in an irreducible map, *Amer. J. Math.* **62** (1940), 406 – 416.

Wing, O.

[Wng1] On drawing a planar graph, *IEEE Trans. Cir. Theory* **13** (1966), 112 – 114.

Witten, E.

[Wnt1] Quantum field theory and the Jones polynomial, *Comm. Math. Phys.* **121** (1989), 351 – 399.

Wong, D. F.

[Wo1] Floorplan design of VLSI circuits, *Algorithmica* **4** (1989), 263 – 291.

Wu , W. T.(吴文俊)

[Wu1] 可剖形在欧氏空间的实现问题， 数学学报 **5** (1955), 505–552.

[Wu2] 线性图的平面嵌入， 科学通报 **19** :2 (1974), 226–228.

[Wu3] Rational Homotopy Type, Lect. Notes in Math. 1246, Springer, 1987.

[Wu4] 集成电路设计中的数学问题， 数学的实践与认识 No.1 (1973), 20 – 40.

[Wu5-6] On the planar embedding of linear graphs I, *J. Syst. Sci. Math.* **5** (1985), 290 – 320; II, ibid. **6** (1986), 23 – 35.

Xu, W. X.(徐伟宣)

[Xu1] An efficient algorithm for planarity testing based on Wu(吴文俊)-Liu(刘彦佩)'s criterion, Proc. 1-st China-USA Conf. Graph Theory and its Applications, Ann. N. Y. Acad. Sci., **576** (1989), 641—652.

Xuong, N. H.

[Xuo1] How to determine the maximum genus of a graph, *J. Comb. Theory* **B26** (1979), 217–225.

Yannakakis, M.

[Y1] Embedding planar graphs in four pages, *J. Comput. Syst. Sci.* **38** (1989), 36 – 67.

Yao, X., M. Yamada and C. L. Liu

[YYL1] A new approach to the pin assignment problem, *IEEE Trans. CAD* **8** (1989), 999 – 1006.

Yoshida, K. and T. Nakagawa

[YoN1] Topological layout design of monolithic IC in CAD, in Digest ISSCC Philadelphia, PA, 1969, 136 – 137.

Youngs, J. W. T.

[You1] Minimal embeddings and the genus of graphs, *J. Math. Mech.* **12** (1963), 353–315.

Zaks, J.

[Z1] Pairs of Hamiltonian circuits in 5 - connected planar grapphs,

J. Comb. Theory **B21** (1976), 116 – 131.

Zykov, A. A.

[Zy1] Foundations of Graph Theory (Russian), Nauka, 1987.

名词索引(汉英)

四画

五画

六画

七画

八画

九画

十画

十一画

十二画

十三画

十四画

十五画

十六画

十八画

数字

字母

名词索引(英汉)

A

B

C

D

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

W

X

Z